$\boxed{5-1}$ Un uomo di massa $M = 90{,}0$ kg è in piedi su di una superficie ghiacciata priva di attrito. Si calcoli:

(a) con quale velocità $|\mathbf{V}|$ e in quale direzione si muove l'uomo se esso lancia orizzontalmente una palla da tennis di massa $m = 300$ g con velocità $|\mathbf{v}| = 30{,}0$ m/s;

(b) quanto vale la forza media $|\mathbf{F}|$ che agisce sull'uomo se egli lancia ogni $5{,}00$ s 8 di tali palle.

$\boxed{5-1}$ Indichiamo con $\mathbf{V}$ la velocità con cui si muove l'uomo e con $\mathbf{F}$ la forza su di lui agente.
(a) Il sistema costituito dall'uomo e dalla palla da tennis è isolato, infatti le forze esterne agenti su di esso (peso, e reazione vincolare della superficie ghiacciata) hanno risultante nulla. Si può perciò applicare il principio di conservazione della quantità di moto:

quantità di moto iniziale = quantità di moto finale

$$0 = M\mathbf{V} + m\mathbf{v} \quad ,$$

e quindi:

$$\mathbf{V} = -\frac{m}{M}\mathbf{v} \quad ,$$

cioè l'uomo si muove con velocità di modulo:

$$V = \frac{mv}{M} = \frac{0{,}3 \cdot 30}{90} = 0{,}1 \text{ m/s} = 10 \text{ cm/s} \quad ;$$

nella stessa direzione e con verso opposto a $\mathbf{v}$.
(b) Dall'espressione generale della seconda legge di Newton:

$$\mathbf{f} = \frac{\Delta(m\mathbf{v})}{\Delta t} \quad ,$$

segue che il lancio di una palla equivale ad applicare all'uomo per il tempo Δt una forza media $\mathbf{f}$ diretta nella stessa direzione di $\mathbf{v}$, ma con verso opposto. Quindi, poiché in 5 s l'uomo lancia 8 palle ciascuna delle quali ha quantità di moto mv, la forza media F è:

$$F = \frac{8 \cdot 0{,}3 \cdot 30}{5} = 14{,}4 \text{ N} \quad .$$

$\boxed{5-8}$ Due sfere di massa $m_1 = 500$ g e $m_2 = 1'000$ g sono collegate da un'asta rigida di peso trascurabile e di lunghezza l. Allorché il sistema viene fatto ruotare attorno al suo centro di massa con velocità angolare $\omega = 100$ rad/s il momento della quantità di moto (o momento angolare) è $|\mathbf{M}| = 3,00$ kg·m²/s. Si calcoli la posizione x_{cm} del centro di massa e la lunghezza l.

$\boxed{5-8}$ Introduciamo un sistema di riferimento unidimensionale con l'origine in m_1 e con l'asse di riferimento diretto verso m_2. Sia $x_2 = l$ la coordinata di m_1 e x_{CM} la coordinata del centro di massa definita dalla:

$$x_{CM} = \frac{x_1 m_1 + x_2 m_2}{m_1 + m_2} = \frac{l m_2}{m_1 + m_2} = \frac{2}{3} \cdot l \quad .$$

Siano r_1 ed r_2 le distanze dal centro di massa e v_1 e v_2 le velocità di m_1 e m_2, rispettivamente.
Il momento della quantità di moto del sistema o momento angolare M si ha:

$$\mathcal{M} = m_1 v_1 r_1 + m_2 v_2 r_2 = m_1 \omega r_1^2 + m_2 \omega r_2^2 =$$

$$\omega l^2 [m_1 \frac{4}{9} + m_2 \frac{1}{9}] \quad ,$$

da cui segue:

$$l = \sqrt{\frac{\mathcal{M}}{\omega} \left[m_1 \frac{4}{9} + m_2 \frac{1}{9}\right]^{-1}} =$$

$$= \sqrt{\frac{3}{100} / \left[0,5 \frac{4}{9} + 1 \cdot \frac{1}{9}\right]} = 0,3 \text{ m} = 30 \text{ cm} \quad .$$

$\boxed{5-12}$ Un corpo di massa $M = 1'000$ g, che si muove su di un piano orizzontale privo di attrito con velocità costante $|\mathbf{V}| = 30,0$ cm/s, urta elasticamente, testa a testa[1] contro un altro corpo fermo di massa m. Dopo la collisione la velocità del primo corpo è $|\mathbf{V}| = 10,00$ cm/s nella stessa direzione e verso della velocità iniziale.

Calcolare:

(a) la massa m;

(b) la velocità $|\mathbf{v}'|$ di m dopo l'urto.

$\boxed{5-12}$ Poiché è nulla la risultante delle forze esterne agenti sul sistema costituito dai due corpi e l'urto è elastico, si conservano la quantità di moto totale e l'energia cinetica complessiva del sistema. Cioè, con ovvio significato dei simboli, si ha, ricordando che l'urto è centrale:

$$MV = MV' + mv' \quad , \tag{1}$$

$$\frac{1}{2}MV^2 = \frac{1}{2}MV'^2 + \frac{1}{2}mv'^2 \quad , \tag{2}$$

che equivalgono alle:

$$M(V - V') = mv' \tag{3}$$

$$M(V + V')(V - V') = mv'^2 \quad . \tag{4}$$

Dividendo membro a membro la (4) per la (3), si ha:

$$v' = V + V' = 40 \text{ cm/s} \quad ,$$

che, inserita nella (3), permette di arrivare alla:

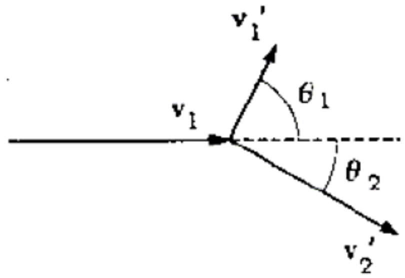
$$m = \frac{M(V - V')}{(V + V')} = 500 \text{ g} \quad .$$

$\boxed{5-14}$ Una sfera che si muove su di un piano orizzontale privo di attrito con velocità $|\mathbf{v}_1| = 5,00$ m/s colpisce una sfera identica ferma. Dopo l'urto si trova che una sfera si muove con velocità $|\mathbf{v}'_1| = 2,50$ m/s ad un angolo $\theta_1 = 60°00'$ con la direzione del moto originale. Calcolare la velocità $|\mathbf{v}'_2|$ e l'angolo θ_2 dell'altra sfera. Dire se in base ai dati del problema l'urto può essere elastico?

$\boxed{5-14}$ Applicando la legge di conservazione della quantità di moto si ottiene la seguente equazione vettoriale:

$$m\mathbf{v}_1 = m\mathbf{v}'_1 + m\mathbf{v}'_2 \quad ,$$

che, scomposta lungo la direzione di $\mathbf{v}_1$ e quella ad essa ortogonale, si scrive (vedi figura):



$$v_1 = v'_1 \cos\theta_1 + v'_2 \cos\theta_2, \qquad (1)$$

$$v'_1 \sin\theta_1 = v'_2 \sin\theta_2. \qquad (2)$$

Dividendo la (2) per la (1) si ha:

$$\tan\theta_2 = \frac{v'_1 \sin\theta_1}{v_1 - v'_1 \cos\theta_1} = 0,578 \quad ,$$

da cui segue $\theta_2 = 30.03°$. Dalla (2) si ottiene allora:

$$v'_2 = \frac{v'_1 \sin\theta_1}{\sin\theta_2} = 4,33 \text{ m/s} \quad .$$

L'urto è elastico se viene conservata l'energia cinetica, cioè se:

$$\frac{1}{2}mv_1^2 = \frac{1}{2}mv_1'^2 + \frac{1}{2}mv_2'^2 \quad ,$$

ovvero se:

$$v_1^2 - v_1'^2 - v_2'^2 = 0 \quad . \qquad (3)$$

Inserendo i dati numerici del problema nella (3) si trova che questa è soddisfatta nell'ambito della precisione numerica con cui i dati stessi sono stati calcolati.

1. Una molla di costante elastica K si trova nella sua posizione di equilibrio su un piano orizzontale senza attrito. Un estremo della molla è vincolato ad una parete verticale, mentre all'altro estremo è collegata una pallina di massa m = 10 g. Un altro corpo avente la stessa massa e velocità v=4 m/s, urta la pallina in modo completamente anelastico. Il sistema inizia ad oscillare ed in un intervallo di tempo $T_1 = 10\ s$ si contano 8 oscillazioni complete. Si determinino:

a) la costante elastica della molla;
b) l'energia meccanica del sistema dopo l'urto;
c) l'ampiezza massima di oscillazione.

Soluzione esercizio 1

a) la costante elastica della molla;
il periodo dell'oscillazione vale: $T = T_1/8 \ = \ 10/8 \ = \ 1.25\ s$
dato che $T = 2\pi \cdot \sqrt{(m+m)/K} \Rightarrow K = m \cdot 4\pi^2/T^2 \ = \ 0.02 \cdot 4\pi^2/1.25^2 \ = \ 0.5\ N/m$

b) l'energia meccanica del sistema dopo l'urto;
L'urto e' completamente anelastico, quindi le due masse rimangono unite. Per la conservazione della quantità di moto, visto che le due masse sono uguali, la velocità subito dopo l'urto vale $v_f \ = v/2 \ = 4/2 \ = \ 2\ m/s$. Un istante dopo l'urto la molla è ancora nella sua posizione di riposo, quindi non c'e' energia potenziale. L'energia meccanica è pari all'energia cinetica delle due palline: $E = \frac{1}{2} \cdot (2m) \cdot v_f^2 \ = \ 0.5 \cdot 0.02 \cdot 4 \ = \ 0.04\ J$

c) l'ampiezza massima di oscillazione;
nel momento di massima oscillazione, l'energia meccanica è espressa dalla sola energia potenziale, per cui: $E = \frac{1}{2} \cdot K \cdot A^2 \Rightarrow A \ = \ \sqrt{2E/K} \ = \ \sqrt{2 \cdot 0.04/0.5} \ = \ 0.40\ m$

1. Uno sciatore di massa 80 Kg scende lungo un pendio di angolo 20 gradi, compiendo un tragitto di 500 m alla velocità costante di 15 m/s. Calcolare :

a) il coefficiente di attrito dinamico cui è sottoposto lo sciatore;
b) l'energia dispersa nel tragitto;
c) la velocità finale che lo sciatore avrebbe in assenza di attriti, partendo da fermo.

Esercizio 1.

a) L'accelerazione totale è nulla, quindi è nulla anche la forza totale cui è sottoposto lo sciatore :

$mgsin\theta - \mu mgcos\theta = 0$

$\mu = \frac{sin\theta}{cos\theta} = tan\theta = 0.36;$

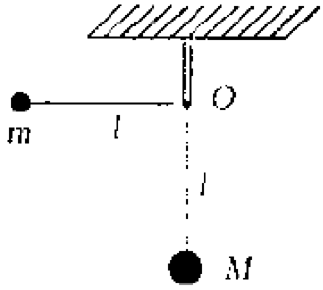
b) L'energia totale non aumenta, pertanto l'energia dispersa è tutta l'energia potenziale :

$E_{persa} = mglsin\theta = 134KJ;$

c) Dalla conservazione dell'energia :

$1/2mv^2 = mglsin\theta; v = \sqrt{2glsin\theta} = 57m/s.$

$\boxed{5-20}$ Si considerino le due sfere di massa $m = 500$ g e $M = 600$ g appese inizialmente come in figura con cavi (inestensibili e di massa trascurabile) di lunghezza $l = 100$ cm. Se si lascia cadere m e l'urto con M è completamente elastico, calcolare gli angoli massimi θ e ϕ che i due cavi formano dopo l'urto con la verticale.
[$\theta = 7°20'$; $\phi = 80°8'$]



$\boxed{5-20}$ Occorre calcolare in primo luogo la velocità v con cui la massa m urta contro M. Dalla legge di conservazione dell'energia si ha:

$$mgl = \frac{1}{2}mv^2 \quad ,$$

da cui segue:

$$v = \sqrt{2lg} = 4,43 \text{ m/s} \quad .$$

Le velocità v' e V' di m e M, subito dopo l'urto, sono facilmente calcolabili applicando le leggi di conservazione della quantità di moto e dell'energia cinetica (urto elastico):

$$mv = MV' - mv' \quad , \tag{1}$$

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mv'^2 + \frac{1}{2}MV'^2 \quad . \tag{2}$$

Nella scrittura dell'equazione (1) si è scelto come verso positivo per $\mathbf{v}'$ e $\mathbf{V}'$ lo stesso di $\mathbf{v}$. Il precedente sistema di equazioni equivale al seguente:

$$m(v + v') = MV' \quad , \tag{3}$$

$$m(v + v')(v - v') = MV'^2 \quad . \tag{4}$$

Dividendo membro a membro le precedenti equazioni, si ha:

$$V' = v - v' \quad , \tag{5}$$

che sostituita nella (3) permette di ricavare v':

$$v' = v\frac{M - m}{M + m} = \sqrt{2lg}\frac{M - m}{M + m} = 0,40 \text{ m/s} \quad .$$

Usando infine ancora la (5) si ricava V':

$$V' = 4,43 - 0,40 = 4,03 \text{ m/s} \quad .$$

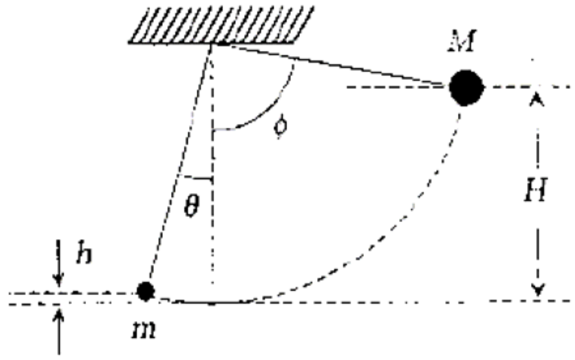
Le quote massime h e H raggiunte da m e M dopo il primo urto sono facilmente ottenibili dalle relazioni:

$$mgh = \frac{1}{2}mv'^2 \quad , \quad MgH = \frac{1}{2}MV'^2 \quad ;$$

da cui segue

$$h = \frac{v'^2}{2g} = 0,82 \text{ cm} \quad , \quad H = \frac{V'^2}{2g} = 82,86 \text{ cm} \quad .$$

Per gli angoli θ e ϕ (vedi figura) si ha:



$$\cos\theta = \frac{l-h}{l} = 0,9918 \quad ,$$

da cui: $\theta = 7°20'$,

$$\cos\phi = \frac{l-H}{l} = 0,1714 \quad ,$$

da cui: $\phi = 80°8'$.