$\boxed{3-4}$ Una forza orizzontale costante $|\mathbf{F}| = 50$ N agisce su di un corpo posto su di un piano orizzontale privo di attrito. Il corpo parte dalla posizione di riposo e dopo un tempo $t_1 = 5,0$ s ha percorso lo spazio $s_1 = 100$ m. Si calcoli la massa m del corpo.

$\boxed{3-4}$ Poiché $F = costante$ il moto di m risulta uniformemente accelerato con accelerazione:

$$a = \frac{F}{M} \quad ;$$

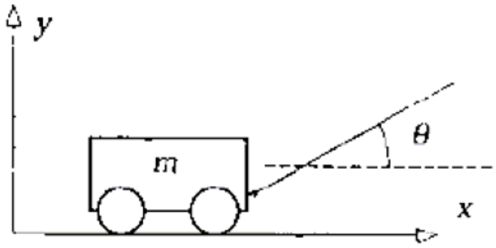
si ha quindi l'equazione:

$$s_1 = \frac{1}{2}at_1^2 = \frac{1}{2}\frac{F}{m}t_1^2 \quad ,$$

che, risolta rispetto a m, dà:

$$m = \frac{Ft_1^2}{2s_1} = \frac{50 \cdot 25}{2 \cdot 100} = 6,25 \text{ kg} \quad .$$

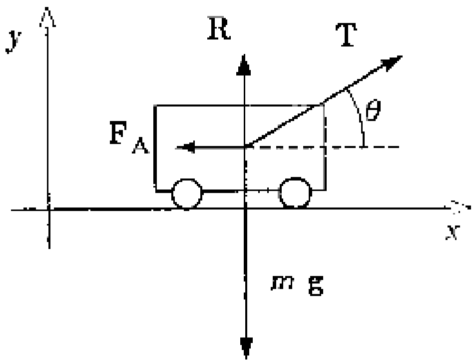
$\boxed{3-8}$ Un carrello di massa $m = 50,0$ kg si muove su di un piano orizzontale scabro tirato da una fune formante un angolo $\theta = 30°00'$ con il piano orizzontale. Calcolare il modulo $|\mathbf{a}_x|$ dell'accelerazione con cui si muove il carrello lungo il piano orizzontale e la componente normale della forza di reazione $\mathbf{R}$ del piano, sapendo che la tensione della fune è $|\mathbf{T}| = 400$ N e che la forza di l'attrito è $|\mathbf{F}_A| = 100,0$ N.



$\boxed{3-8}$ Applicando la seconda legge della dinamica al carrello, si ha:

$$\mathbf{T} + \mathbf{F}_A + m\mathbf{g} + \mathbf{R} = m\mathbf{a} \quad ,$$

ossia, proiettando sugli assi x e y (cfr. figura):



$$T\cos\theta - F_A = ma_x \quad , \quad T\sin\theta - mg + R = ma_y \quad .$$

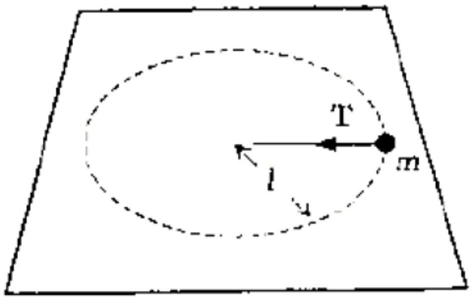
Poiché la componente verticale $T\sin\theta$ della tensione risulta inferiore alla forza di gravità mg, il piano esercita sul carrello una forza R, diretta verso l'alto, il cui modulo si ottiene ponendo $a_y = 0$:

$$R = mg - T\sin\theta = 50 \cdot 9,8 - 400 \cdot 0,5 = 290 \text{ N} \quad .$$

Il moto del carrello si svolge pertanto lungo il piano orizzontale con accelerazione:

$$a_x = \frac{T\cos\theta - F_A}{m} = \frac{400 \cdot \sqrt{3}/2 - 100}{50} = 4,93 \text{ m/s}^2 \quad .$$

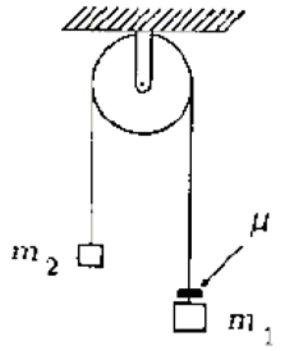
3 – 10 Un corpo di massa $m = 500$ g, attaccato ad un cavo inestensibile e di massa trascurabile, viene fatto ruotare con velocità costante $|\mathbf{v}| = 5,00$ m/s su di un piano orizzontale privo di attrito. Il cavo di lunghezza $l = 50,0$ cm è fissato al piano all'estremità opposta. Calcolare la tensione $|\mathbf{T}|$ del cavo.



3 – 10 Le forze agenti sul corpo di massa m sono: il peso $m\mathbf{g}$, la reazione vincolare del piano uguale ed opposta al peso e la tensione $\mathbf{T}$ del cavo, diretta radialmente. Poiché il moto di m è circolare e uniforme, T è uguale alla forza centripeta, cioè:

$$T = ma_C = m\frac{v^2}{l} = \frac{0,5 \cdot 25}{0,5} = 25 \text{ N} \quad .$$

$\boxed{3-19}$ Due masse $m_1 = m_2 = 5,0$ **kg** sono appese come in figura. Quale massa μ deve essere aggiunta a m_1 affinché essa scenda di un tratto $h = 2,0$ **m** in un tempo $\tau = 3$ **s** ? (Si trascurino le masse della fune e della carrucola e l'attrito).
[$\mu = 0,48$ **kg**]



$\boxed{3-19}$ La seconda legge di Newton, applicata rispettivamente a $(m_1 + \mu)$ e a m_2, dà:

$$(m_1 + \mu)g - T = (m_1 + \mu)a_1 \quad , \tag{1}$$

$$m_2 g - T = m_2 a_2 \quad . \tag{2}$$

Poiché la fune che collega le due masse è inestensibile, si ha:

$$a_1 = -a_2 \quad ,$$

e quindi, risolvendo la (2) rispetto a T e sostituendo nella (1), si ha:

$$(m_1 + \mu)g - m_2(g + a_1) = (m_1 + \mu)a_1 \quad ,$$

cioè:

$$\mu(g - a_1) = (m_2 - m_1)g + (m_1 + m_2)a_1 \quad . \tag{3}$$

Ora a_1 si può ricavare tenendo conto che $(m_1 + \mu)$ percorre lo spazio h nel tempo τ con moto uniformemente accelerato, cioè:

$$h = \frac{1}{2}a_1\tau^2 \quad ,$$

da cui segue:

$$a_1 = \frac{2h}{\tau^2} \quad ,$$

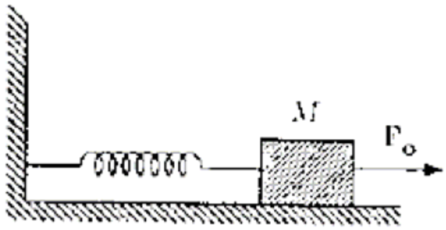
che, sostituita nella (3), dà:

$$\mu = \frac{(m_2 - m_1)g + (m_1 + m_2)\dfrac{2h}{\tau^2}}{g - \dfrac{2h}{\tau^2}} \quad .$$

Osservando che $m_1 = m_2 = m$, si ha infine:

$$\mu = \frac{4mh}{g\tau^2 - 2h} = \frac{4 \cdot 5 \cdot 2}{9,8 \cdot 9 - 4} = 0,475 \text{ kg} \quad .$$

4 − 26 Un corpo di massa $M = 100$ g, posto su di un piano orizzontale privo di attrito, è collegato ad una molla di costante di richiamo elastica $k = 1,00 \cdot 10^{-3}$ newton/m. Ad un certo istante su di esso comincia ad agire una forza costante $|\mathbf{F}_0| = 50$ dine orizzontale (vedi figura). Calcolare:



(a) la velocità $|\mathbf{v}|$ del corpo quando, sotto l'azione della forza $|\mathbf{F}_0|$, la molla si è allungata di un tratto $a = 0,50$ m;

(b) l'allungamento massimo b della molla se una volta raggiunto l'allungamento a la forza $|\mathbf{F}_0|$ cessa di agire.

4 − 26 Applicando la legge di conservazione dell'energia si ha:

$$L = \Delta U + \Delta E_c \quad , \qquad (1)$$

ove L è il lavoro eseguito dalla forza F_0, ΔU è la variazione di energia potenziale elastica, ossia, a parte il segno, il lavoro eseguito dalla forza di richiamo della molla, e ΔE_c è la variazione di energia cinetica del corpo di massa M.
Quando la molla si è allungata di un tratto a la relazione (1) si scrive:

$$F_0 a = \frac{1}{2} k a^2 + \frac{1}{2} M v^2 \quad ,$$

da cui segue:

$$v = \sqrt{\frac{2F_0 a - k a^2}{M}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 5 \cdot 10^{-4} \cdot 0,5 - 10^{-3} \cdot 0,5^2}{0,1}} = 5 \cdot 10^{-2} \text{ m/s} = 5 \text{ cm/s} \quad .$$

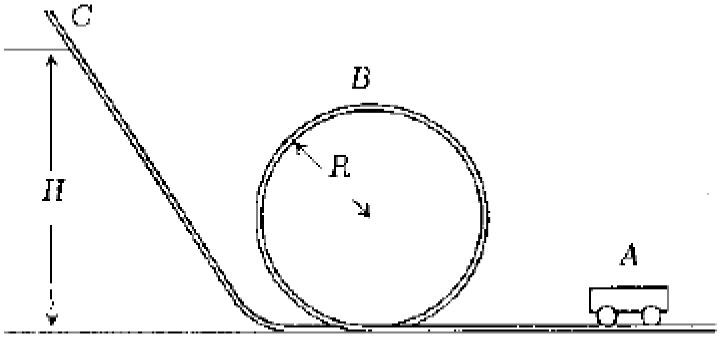
Se, quando la molla è stata allungata di un tratto a, si elimina la forza F, la molla si allunga ulteriormente a spese dell'energia cinetica della massa M. Pertanto la legge di conservazione dell'energia dà:

$$\frac{1}{2} k b^2 = \frac{1}{2} k a^2 + \frac{1}{2} M v^2 \quad ,$$

da cui segue:

$$b = \sqrt{a^2 + \frac{M v^2}{k}} = \sqrt{0,5^2 + \frac{0,1}{10^{-3}} (5 \cdot 10^{-2})^2} = 0,705 \text{ m} \quad .$$

$\boxed{4-20}$ Facendo riferimento alla figura, si pensi di dare al carrello, fermo nel punto A, una spinta tale da farlo partire con velocità appena sufficiente a fargli percorrere il giro all'interno della guida circolare, di raggio $R = 2,0$ m, senza perdere il contatto con le rotaie. Il carrello poi prosegue il suo moto lungo il binario fino a fermarsi nel punto C a quota H. Calcolare il valore di H. [$H = 5,0$ m]



$\boxed{4-20}$ Nel percorrere la guida il carrello è soggetto alla forza peso mg, sempre diretta verticalmente verso il basso, ed alla reazione vincolare della guida, diretta radialmente. Nel punto B le due forze hanno stessa direzione e stesso verso. Affinché il carrello percorra un giro completo senza perdere il contatto con la guida, occorre dunque che nel punto B l'accelerazione centripeta sia almeno uguale all'accelerazione di gravità (in tale ipotesi la reazione vincolare della guida nel punto B risulta nulla), cioè:

$$\frac{v_B^2}{R} = g \quad ,$$

da cui segue:

$$v_B^2 = gR \quad .$$

Dopo aver compiuto il giro nella guida il carrello sale lungo il binario fermandosi nel punto C a quota H.
Applicando il principio di conservazione dell'energia tra i punti B e C[1] si ha:

$$\frac{1}{2}mv_B^2 + mg2R = mgH \quad , \tag{1}$$

da cui segue:

$$H = \frac{v_B^2/2 + 2gR}{g} = \frac{R}{2} + 2R = \frac{5}{2}R = 5 \text{ m} \quad .$$

Un blocco di massa $0.1\,kg$, inizialmente fermo, posto su una guida lunga $5\,m$ ed inclinata di 30^o rispetto al piano orizzontale, viene trascinato verso l'alto da una forza di intensità pari a $2\,N$, diretta parallelamente alla guida. Se si trascurano gli attriti

a) Quanto vale l'accelerazione del corpo?
b) Quanto tempo impiega il blocco per arrivare in cima alla guida?
c) Quanto vale la sua velocità finale?
d) Se invece la guida non è priva di attriti, ma esercita una forza di attrito costante e pari al 20% del peso del corpo, quanto varranno l'accelerazione, il tempo impiegato a risalire la guida e la velocità finale?

Ris.: $a = 15.1\,m/s^2$; $t = 0.82\,s$ $v_{fin} = 12.3\,m/s$ $a' = 13.4\,m/s^2$; $t' = 0.87\,s$; $v'_{fin} = 11.5\,m/s$

Soluzione:

a) **Calcolare l'accelerazione del corpo**

La legge di Newton mi dice che l'accelerazione è legata alla risultante delle forze da

$$\vec{F}_R = m\vec{a}$$

Quindi per calcolare l'accelerazione devo calcolare la risultante delle forze sul corpo.

- **Calcolare la risultante delle forze**

La risultante delle forze è definita come la somma vettoriale delle forze agenti sul corpo

$$\vec{F}_R = \sum \vec{f}_i$$

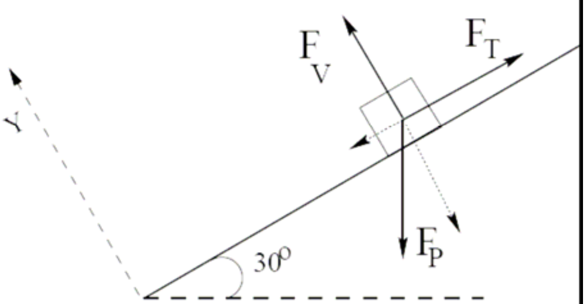
Per calcolarla devo quindi identificare le forze agenti sul corpo (in modulo direzione e verso)

Il testo del problema mi dice che c'è una forza (F_T) che trascina il corpo lungo la guida.

Sicuramente agisce anche la forza di gravità(F_P), che è diretta verso il basso.

Ci sarà poi una reazione vincolare data dalla guida (F_V), che "impedisce" al corpo di "cadere dentro" la guida.

La reazione vincolare è sicuramente perpendicolare alla guida e deve essere tale da annullare la risultante delle forze nella direzione perpendicolare alla guida. Disegnando il grafico delle forze applicate al corpo, osservo che il sistema di coordinate più comodo per esprimere le componenti delle forze è quello con l'asse x parallelo alla guida e l'asse y perpendicolare ad essa.



Scrivendo le componenti delle forze in questo sistema di coordinate, posso calcolare la risultante

$$\begin{aligned} F_{Rx} = &\ F_{Px} + F_{Tx} + F_{Vx} \\ F_{Ry} = &\ F_{Py} + F_{Ty} + F_{Vy} \end{aligned}$$

Cioè

$$\begin{aligned} F_{Rx} = &\ -mg\sin\theta + F_T \\ 0 = &\ -mg\cos\theta + F_V \end{aligned}$$

(La reazione vincolare deve bilanciare esattamente la componente della forza peso perpendicolare alla guida)

A questo punto ho ottenuto la soluzione

$$a = \frac{F_T - mg\sin\theta}{m}$$

Numericamente

$$a = \frac{2\,N - 0.1\,kg \cdot 9.8m/s^2 \cdot \sin 30}{0.1\,kg} = 15.1\,m/s^2$$

b) **Calcolare il tempo che impiega ad arrivare in cima**
Mi chiede quindi di calcolare il valore di t_{sal} per cui

$$x(t_{sal}) = L$$

dove L è la lunghezza della guida.
Avendo formulato la domanda in questo modo, è abbastanza chiaro che per calcolare t_{sal} posso ricorrere alle equazioni del moto, che in questo caso è uniformemente accelerato:

$$x(t) = x_o + v_o(t - t_o) + \frac{1}{2}a(t - t_o)^2$$

usando i dati del problema ($x_o = 0$ e $v_o = 0$),

$$L = \frac{1}{2}at_{sal}^2$$

cioè

$$t_{sal} = \sqrt{\frac{2L}{a}}$$

Numericamente:

$$t_{sal} = \sqrt{\frac{2 \cdot 5\,m}{15\,m/s^2}} = 0.82\,s$$

c) **Calcolare la velocità finale**
La velocità finale è la velocità che raggiunge quando arriva in cima, ossia la velocità che il corpo ha quando $t = t_{sal}$.
Per calcolare la velocità finale posso usare l'equazione (valida nel caso di un moto uniformemente accelerato)

$$v(t) = v_o + a(t - t_o)$$

calcolandola per $t = t_{sal}$, cioè

$$v_{fin} = at_{sal} = \sqrt{2aL}$$

Numericamente

$$v_{fin} = \sqrt{2 \cdot 15.1\,m/s^2 \cdot 1\,m} = 12.3\,m/s$$

d) **Considerafre la presenza di attrito**
L'ultima domanda mi chiede di rifare tutti questi conti nell'ipotesi che la guida eserciti una forza di attrito costante.
Questo significa che devo tener conto di una ulteriore forza nel calcolo della risultante (usata per calcolare l'accelerazione).

$$\begin{aligned} F'_{Rx} = &\quad F_{Px} + F_{Tx} + F_{Vx} + F_{Ax} \\ F'_{Ry} = &\quad F_{Py} + F_{Ty} + F_{Vy} + F_{Ay} \end{aligned}$$

Per inserire la forza di attrito nel calcolo della risultante devo conoscerne il modulo, la direzione ed il verso.

- **Quali sono le componenti della forza di attrito?**

  Una forza di attrito è una forza che si oppone al moto e che è sempre parallela alla direzione del moto, ma ha verso opposto. Questo mi dice subito che se il corpo si muove parallelamente alla guida verso l'alto, la forza di attrito sarà diretta sempre parallela alla guida ma verso il basso.

  Nel sistema di coordinate che abbiamo utilizzato $F_{Ax} = -|F_A|$, $F_{Ay} = 0$

  Mi rimane da calcolarne il modulo. Il testo del problema mi dice che la forza di attrito (F_A) è pari al 20% del peso del corpo.

  Questa affermazione si traduce in una equazione:

$$|F_A| = \frac{20}{100}|F_P|$$

  cioè

$$|F_A| = 0.2mg \qquad \vec{F}_A = (-0.2mg; 0)$$

La risultante delle forze F'_R sarà data da

$$\begin{aligned} F'_{Rx} = & \quad -mg\sin\theta + F_T - 0.2mg = F_T - mg(sin\theta + 0.2) \\ 0 = & \quad -mg\cos\theta + F_{Vy} \end{aligned}$$

Da cui si ricava immediatamente

$$a' = \frac{F'_R}{m} = \frac{F_T - mg(\sin\theta - 0.2)}{m}$$

Numericamente

$$a' = \frac{2\,N - 0.1\,kg \cdot 9.8\,m/s^2(0.5 + 0.2)}{0.1\,kg} = 13.4\,m/s^2$$

Il nuovo valore del tempo di salita e della velocità finale si trovano semplicemente sostituendo a con a' nelle rispettive formule. Numericamente

$$t'_{sal} = 0.87\,s \qquad v'_{fin} = 11.5\,m/s$$

Un uomo di massa $70\,kg$ salta da un'altezza di $1\,m$ con velocità iniziale nulla.
Se cade senza piegare le gambe si ferma in $0.1\,s$, mentre piegando le gambe si arresta in $0.5\,s$.
Calcolare l'accelerazione media e la forza media nei due casi.

Soluzione:

a) **Calcolare l'accelerazione media e la forza media esercitata durante l'impatto col terreno**

L'accelerazione media che mi si chiede di calcolare è definita come

$$a_m = \frac{v_f - v_i}{\Delta t}$$

Nel caso specifico (la velocità finale è zero), la velocità "iniziale" è quella che ha prima di toccare terra

$$a_m = -\frac{v_{terra}}{\Delta t}$$

Per rispondere devo calcolare la velocità con cui arriva a terra (e non quella dal momento in cui salta da fermo al momento in cui arriva a terra e si ferma, perche' in quel caso l'accelerazione media è zero!)

- **Calcolare la velocità con cui arriva a terra**

  La velocità con cui arriva a terra è quella acquistata dopo una caduta dall'altezza di $1\,m$.

  Si tratta di un moto di caduta libera di un grave, quindi posso utilizzare le equazioni del moto uniformemente accelerato con accelerazione pari a g

  $$v(t) = v_o + a(t - t_o)$$

  Nel caso specifico (considero l'asse delle coordinate verso il basso)

  $$v(t) = gt$$

  La velocità con cui arriva a terra è quella raggiunta all'istante t_{cad} (tempo impiegato a cadere)

  $$v_{terra} = gt_{cad}$$

  - **Quanto vale il tempo di caduta?**

    Per calcolare il tempo di caduta l'unico dato che ho è che

    $$z_f = z(t_{cad}) = z_o + h = z_o + 1\,m$$

    Posso scrivere l'equazione del moto $z(t)$

    $$z(t) = z_o + v_{oz} + \frac{1}{2}a(t - t_o)^2$$

    Nel nostro caso, con i dati del problema (e con la nostra scelta del sistema di coordinate)

    $$z(t) = z_o + \frac{1}{2}gt^2$$

    Quindi si ricava

    $$t_{cad} = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

Sostituendo nell'equazione della velocità ottengo

$$v_{terra} = \sqrt{2gh}$$

Avrei potuto ottenere più rapidamente lo stesso risultato osservando che durante il salto l'energia si conserva

$$E^{in}_{pot\,g} + E^{in}_{cin} = E^{fin}_{pot\,g} + E^{fin}_{cin}$$

da cui

$$mgh = \frac{1}{2} m v^2_{terra}$$

L'accelerazione media nell'impatto col terreno vale quindi:

$$a_m = -\frac{\sqrt{2gh}}{\Delta t} = -\frac{\sqrt{2 \cdot 1\,m \cdot 9.8\,m/s^2}}{0.1\,s} = -44.3\,m/s^2$$

(il segno meno indica che l'accelerazione è diretta verso l'alto)
Mi si chiede inoltre di calcolare la forza media.
La forza è legata all'accelerazione da

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

Quindi

$$F_m = m a_m$$

Numericamente

$$F_m = 70\,kg \cdot (-44.3\,m/s^2) = -3100\,N$$

b) **Calcolare le stesse grandezze nel caso in cui, piegando le gambe durante l'impatto col terreno, il tempo di impatto si allunghi fino a $0.5\,s$.**
Dato che la velocità con cui si arriva a terraè la stessa, si tratta di calcolare a_m e F_m usando un diverso valore per Δt Numericamente ottengo:

$$a'_m = -8.85\,m/s^2 \qquad F'_m = -620\,N$$

Allungando il tempo di impatto di un fattore 5, sia l'accelerazione media che la forza media esercitate durante l'impatto si sono ridotte proporzionalmente

Esercizio – Una fune, collegata ad una carrucola, connette due masse identiche, una delle quali è libera di muoversi su un piano inclinato di angolo ϑ (ϑ = 30°), mentre l'altra penzola nel vuoto. Calcolare l'accelerazione su entrambe le masse.

Soluzione –

L'accelerazione è identica per entrambe le masse. Il bilancio delle forze dà :

$(m_1 + m_2)\ a = m_2\ g - m_1\ g \sin \vartheta \Rightarrow m_1 = m_2 = m \Rightarrow$

$a = m\ g\ (1 - \sin \vartheta) / (2m) = g\ (1 - \sin \vartheta) / 2 = 9.8 \times (1 - 0.5) / 2 = 2.45\ m/s^2$;

l'accelerazione è diretta verso il basso per la massa libera e verso l'alto del piano per quella sul piano inclinato.