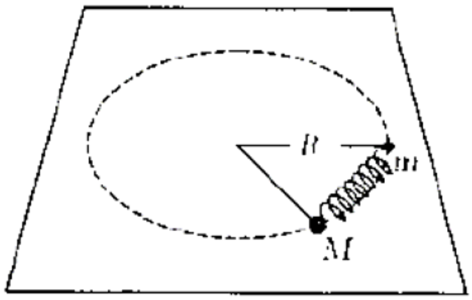
$\boxed{5-18}$ Due sfere di massa $m = 200$ g e $M = 350$ g, poste su di un piano orizzontale privo di attrito, sono unite da un filo e tra di esse è posta una molla compressa. Ciascuna delle due sfere è collegata, con un cavo di lunghezza $R = 50$ cm, ad un pilone attorno al quale è libera di ruotare. Se si taglia il filo, calcolare:

(a) l'angolo θ_1 percorso da m allorché le due sfere si urtano;

(b) il tempo τ intercorso tra l'istante in cui si taglia il filo e l'istante dell'urto se l'energia potenziale della molla compressa è $U = 1,0 \cdot 10^{11}$ erg;

(c) l'angolo θ_2 percorso da m tra il primo ed il secondo urto se gli urti sono elastici.



[(a) $\theta_1 = 229°$; (b) $\tau = 2,5 \cdot 10^{-2}$ s; (c) $\theta_2 = \theta_1$]

$\boxed{5-18}$ Il sistema costituito dalle due sfere è soggetto a forze esterne la cui risultante è la tensione dei cavi. Queste tensioni sono forze centrali, dirette cioè sempre verso un punto fisso (nel caso del problema, verso il punto in cui il pilone attraversa il piano orizzontale) ed obbligano quindi le sfere a muoversi di moto circolare. Esse, in altre parole, sono forze centripete. Caratteristica ben nota di tali forze è di essere sempre perpendicolari alla velocità e quindi di non compiere lavoro. Infatti l'angolo tra la forza e lo spostamento è, istante per istante, uguale a 90°, essendo lo spostamento diretto, istante per istante, come $\mathbf{v}$; quindi il lavoro è nullo essendo $\cos 90° = 0$. Da quanto sopra segue che l'energia cinetica delle sfere non varia. Inoltre, poiché le forze esterne hanno componente nulla rispetto alla direzione tangente al cerchio di raggio R, si deve conservare la componente della quantità di moto lungo questa direzione. Cioè:

componente tangenziale della quantità di moto prima di tagliare il filo =
componente tangenziale della quantità di moto dopo che si è tagliato il filo;

ovvero, indicando con $\mathbf{v}$ e $\mathbf{V}$ le velocità tangenziali di m e M rispettivamente subito dopo aver tagliato il filo e osservando che le quantità di moto iniziale è nulla, si ha:

$$0 = m\mathbf{v} + M\mathbf{V} \quad ,$$

cioè $\mathbf{v}$ e $\mathbf{V}$ hanno la stessa direzione e versi opposti e i loro moduli sono tali che:

$$\frac{v}{V} = \frac{M}{m} \quad . \tag{1}$$

Per quanto abbiamo detto sopra, il moto delle due sfere è uniforme, cioè v e V sono costanti. Quindi, chiamando θ e ϕ gli angoli percorsi da m e M al tempo t, si ha:

$$R\theta = vt \quad , \tag{2}$$

$$R\phi = Vt \quad , \tag{3}$$

da cui segue che, istante per istante:

$$\frac{\theta}{\phi} = \frac{v}{V} = \frac{M}{m} \quad , \tag{4}$$

avendo tenuto conto della (1).

(a) Pertanto le due sfere si incontrano dopo aver percorso gli angoli θ_1 e ϕ_1 tali che:

$$\theta_1 + \phi_1 = 2\pi \quad , \tag{5}$$

cioè (risolvendo la (4) rispetto a ϕ e sostituendo nella (5)) quando m ha percorso l'angolo:

$$\theta_1 = \frac{2\pi\, v}{V + v} = \frac{2\pi\, M}{m + M} = 4{,}0 \text{ rad} \simeq 229° \quad .$$

(b) Per la legge di conservazione dell'energia, l'energia potenziale elastica U della molla si trasforma completamente in energia cinetica delle sfere quando si taglia il filo che le unisce e la molla si può allungare. Quindi si ha:

$$U = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}MV^2 \quad ,$$

da cui segue, utilizzando la (1),

$$v = \sqrt{\frac{2MU}{m(m+M)}} \quad ,$$

e quindi, dalla (2):

$$\tau = \frac{R\theta_1}{v} = R\frac{2\pi M}{m+M}\sqrt{\frac{m(m+M)}{2MU}} = \sqrt{\frac{2\pi^2 R^2 M m}{(m+M)U}} = 2,5 \cdot 10^{-2}\ \mathrm{s} \quad .$$

(c) Dopo l'urto le due sfere si muovono con velocità v_1 e V_1 ricavabili applicando le leggi di conservazione della quantità di moto e dell'energia cinetica, cioè:

$$m\mathbf{v} + M\mathbf{V} = m\mathbf{v}_1 + M\mathbf{V}_1, \tag{7}$$

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}MV^2 = \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}MV_1^2, \tag{8}$$

da cui segue (vedi esercizio 5-13)

$$v_1 = \frac{2MV + v(M-m)}{M+m} \quad ,$$

$$V_1 = \frac{-2mv + V(M-m)}{M+m} \quad .$$

Da cui, tenendo conto della (1), si ha:

$$\mathbf{v}_1 = -\mathbf{v} \quad ,$$

$$\mathbf{V}_1 = -\mathbf{V} \quad ,$$

perciò:

$$\frac{v_1}{V_1} = \frac{M}{m} \quad .$$

Quindi dovendo essere di nuovo:

$$\theta_2 + \phi_2 = 2\pi \quad ,$$

si ha:

$$\theta_2 = 2\pi - \phi_2 = \frac{2\pi\, v_1}{V_1 + v_1} = \frac{2\pi M}{m+M} = \theta_1 \quad .$$