Un corpo di massa $M = 50\,g$ ruota su un piano orizzontale, vincolato tramite una molla, lunga $80\,cm$, ad un centro di rotazione C. Sapendo che la frequenza di rotazione è pari a $0.5\,s^{-1}$, si calcolino:

a) Velocità angolare, velocità periferica e accelerazione centripeta

b) Il valore della forza esercitata dalla molla su M

c) Se la lunghezza a riposo della molla vale $60\,cm$, quanto vale la sua costante elastica?

d) Sapreste indicare il nuovo valore che il raggio di rotazione assumerebbe se la frequenza di rotazione dimezzasse?

Ris.: *a)* $\omega = 3.14\,rad/s$, $v = 2.5\,m/s$, $a_c = 7.9\,m/s^2$; *b)* $F = 0.4\,N$; *c)* $k = 1.98\,N/m$; *d)* $r = 64\,cm$

Soluzione:

a) **Calcolare la velocità angolare, velocità periferica e accelerazione centripeta**

- **velocità angolare** La velocità angolare è definita

$$\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

ed è quindi collegata al periodo (e quindi alla frequenza definita come $f = T^{-1}$, dalla relazione

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$$

Numericamente quindi

$$\omega == 2\pi f = 2 \cdot 3.14\,rad \cdot 0.5\,s^{-1} = 3.14\,rad/s$$

- **velocità periferica** è definita come

$$V_p = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

ed è quindi collegata al periodo, frequenza e velocità angolare dalle relazioni

$$V_p = \frac{2\pi R}{T} = 2\pi R f = \omega R$$

Numericamente quindi

$$V_p = \omega R = 3.14\,rad/s \cdot 0.8\,m = 2.5\,m/s$$

- **accelerazione centripeta** Per un oggetto che si muova di moto circolare uniforme, la risultante delle forze deve essere tale che

$$\vec{F}_R = -m\omega^2\vec{R}$$

dunque l'accelerazione deve valere

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}_R}{m} = -\omega^2\vec{R}$$

ed essere sempre diretta verso il centro di rotazione Numericamente

$$|\vec{a}| = \omega^2|\vec{R}| = (3.14\,rad/s)^2(0.8\,m) = 7.9\,m/s^2$$

b) **Calcolare la forza esercitata dalla molla** L'accelerazione consente di calcolare la risultante delle forze

$$\vec{F}_R = m\vec{a}$$

In questo caso l'unica forza agente nel piano orizzontale è quella della molla (nel piano verticale c'è ovviamente la forza peso, ma essa è bilanciata dalla reazione vincolare che mantiene la pallina sul piano orizzontale)
Quindi

$$\vec{F}_R = \text{somma forze} = \vec{F}_M$$

La forza esercitata dalla molla è costante in modulo ed è sempre diretta verso il centro di rotazione
Numericamente:

$$|\vec{F}_M| = |m\vec{a}| = 0.05\,kg \cdot 7.9\,m/s^2 = 0.4\,N$$

c) **Calcolare la forza esercitata dalla molla** La forza elastica esercitata da una molla è data da

$$\vec{F}_M = -K(\vec{L} - \vec{L}_0)$$

Quindi in questo caso

$$\vec{F}_M = -K(\vec{R} - \vec{R}_0) = -m\omega^2\vec{R}$$

ossia

$$K = \frac{m\omega^2 R}{R - R_0}$$

Numericamente

$$K = \frac{m\omega^2 R}{R - R_0} = \frac{0.05\,kg \cdot (3.14\,rad/s)^2 0.8\,m}{0.2\,m} = 1.97\,N/m$$

d) **Calcolare il raggio di rotazione se la frequenza dimezza**
Ovviamente la costante elastica della molla rimane la stessa

$$\frac{m\omega^2 R}{R - R_0} = \frac{m\omega'^2 R'}{R' - R_0}$$

da cui si ottiene la relazione

$$R' = \frac{R_0}{1 - \left(\frac{\omega'}{\omega}\right)^2 \left(1 - \frac{R_0}{R}\right)}$$

Numericamente

$$R' = \frac{0.6\,m}{1 - (0.5)^2 \left(1 - \frac{0.6\,m}{0.8}\right)} = 0.64\,m$$