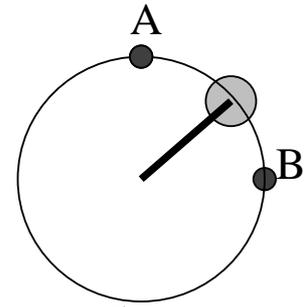


13) Una massa $M = 100\text{ g}$ è collegata all'asse di un motore tramite un'asta rigida di lunghezza $L = 60\text{ cm}$ e ruota su un piano verticale con velocità di 2 m/s .

- Quanto valgono il periodo del moto e l'accelerazione centripeta?
- Cosa si può dire della risultante delle forze lungo la traiettoria?
- Spiegare a quali forze (indicandone modulo direzione e verso) è soggetta la massa M durante la rotazione, e calcolare il valore della risultante e della forza esercitata dall'asta nei punti A e B della traiettoria.



Ris.: $T = 1.88\text{ s}$; $a_c = 6.67\text{ m/s}^2$; $\vec{F}_R = -m\omega^2\vec{r}$; $\vec{F}_{asta}(A) = (0, 0, 0.31)\text{ N}$;
 $\vec{F}_{asta}(B) = (0, -0.67, 0.98)\text{ N}$

Soluzione:

a) Quanto valgono il periodo del moto e l'accelerazione centripeta?

• Quanto vale il periodo del moto?

Il periodo del moto (si tratta di un moto circolare uniforme) è definito come il tempo impiegato per compiere un giro. Dato che il modulo della velocità in un moto circolare uniforme è costante, questo significa che

$$vT = 2\pi r$$

quindi

$$T = \frac{2\pi r}{v}$$

Numericamente:

$$T = \frac{2\pi 60\text{ cm}}{2\text{ m/s}} = \frac{2\pi 60(0.01\text{ m})}{2\text{ m/s}} = 1.88\text{ s}$$

• Quanto vale l'accelerazione centripeta?

– L'accelerazione è definita come

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

– L'accelerazione centripeta in un moto circolare uniforme è data da

$$\vec{a}_c = -\omega^2\vec{r}$$

ed è sempre parallela al raggio, diretta verso il centro. Per calcolarla devo conoscere ω .

* La velocità angolare è definita come

$$\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

. In un moto circolare uniforme la velocità angolare è costante. In un periodo $\Delta\theta = 2\pi$ e $\Delta t = T$, quindi ricavo subito

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{v}{r}$$

Quindi

$$a_c = \frac{v^2}{r}$$

Numericamente:

$$a_c = \frac{(2\text{ m/s})^2}{60\text{ cm}} = \frac{(2\text{ m/s})^2}{60(0.01\text{ m})} = 6.67\text{ m/s}^2$$

b) Quanto vale la risultante delle forze?

- La risultante delle forze è definita come la somma vettoriale di tutte le forze agenti sul corpo

$$\vec{F}_R = \sum \vec{F}_i$$

- La risultante delle forze in un moto qualsiasi è legata all'accelerazione dalla legge di Newton, che è

$$\vec{F}_R = m\vec{a}$$

quindi nel caso specifico del moto circolare uniforme:

$$\vec{F}_R = m\vec{a}_c = -m\omega^2\vec{r}$$

la risultante delle forze ha modulo costante pari a $m\omega^2r$, mentre la sua direzione è parallela al raggio della circonferenza e diretta verso il centro.

Numericamente

$$|F_R| = ma_c = 100\text{ g} \cdot 6.67\text{ m/s}^2 = 0.1\text{ kg} \cdot 6.67\text{ m/s}^2 = 0.67\text{ N}$$

c) **A quali forze è soggetta la massa M durante la rotazione ?** Le forze che agiscono sono la forza peso (\vec{F}_P) e la reazione vincolare dell'asta (\vec{F}_V)d) **Modulo direzione e verso delle forze ?** Il fatto che l'oggetto si muova di moto circolare uniforme mi permette di conoscere in ogni posizione la risultante delle due forze:

$$\vec{F}_R = \vec{F}_P + \vec{F}_V = -m\omega^2\vec{r}$$

- **Modulo direzione e verso della forza peso?** La forza peso è sempre diretta verso il basso e ha modulo pari a Mg
- **Modulo direzione e verso della reazione vincolare?** La reazione vincolare non è nota direttamente.

E' noto solo il valore della sua risultante con la forza peso:

$$\vec{F}_P + \vec{F}_V = -m\omega^2\vec{r}$$

quindi

$$\vec{F}_V = -m\omega^2\vec{r} - \vec{F}_P$$

Quanto vale la reazione vincolare in A e in B ? Punto per punto

$$\vec{F}_V = -m\omega^2\vec{r} - \vec{F}_P$$

Dato che è una equazione vettoriale mi rappresenta in realtà una equazione per ciascuna componente:

$$\begin{aligned} F_{Vx} &= -F_{Px} - m\omega^2r_x \\ F_{Vy} &= -F_{Py} - m\omega^2r_y \\ F_{Vz} &= -F_{Pz} - m\omega^2r_z \end{aligned}$$

per calcolare la reazione vincolare devo quindi scrivere le componenti di \vec{F}_P e \vec{r} in A e B .

- **Quali sono le componenti di \vec{F}_P e \vec{r} ?**

Per scrivere le componenti di un vettore devo fissare un sistema di riferimento.

In questo caso per esempio x perpendicolare al foglio, y orizzontale e z verticale.

In questo sistema di riferimento $\vec{F}_P = (0, 0, -mg)$ mentre $\vec{r} = (0, r \cos \theta, r \sin \theta)$ dove θ è l'angolo formato dal raggio con l'asse orizzontale.

Nel punto A $\vec{r}(A) = (0, 0, r)$, nel punto B $\vec{r}(B) = (0, r, 0)$. Quindi

$$\begin{aligned}F_{V_x}(A) &= -F_{P_x} - m\omega^2 r_x = 0 \\F_{V_y}(A) &= -F_{P_y} - m\omega^2 r_y = 0 \\F_{V_z}(A) &= -F_{P_z} - m\omega^2 r_z = mg - m\omega^2 r\end{aligned}\tag{1}$$

$$\begin{aligned}F_{V_x}(B) &= -F_{P_x} - m\omega^2 r_x = 0 \\F_{V_y}(B) &= -F_{P_y} - m\omega^2 r_y = -m\omega^2 r \\F_{V_z}(B) &= -F_{P_z} - m\omega^2 r_z = mg\end{aligned}$$

Numericamente

$$\begin{aligned}\vec{F}_V(A) &= (0, 0, mg - m\omega^2 r) = (0, 0, 0.31) N & |F_V(A)| &= 0.31 N \\ \vec{F}_V(B) &= (0, -m\omega^2 r, mg) = (0, -0.67, 0.98) N & |F_V(B)| &= 1.41 N\end{aligned}$$