FISICA MATEMATICA (FM2) , A.A. 2007/08
Secondo Esonero (7/01/08)

Esercizio 1 (10 punti)
Data l'equazione

$$\begin{aligned} &\Delta u(x,y) = 0 \qquad x^2+y^2<4 \\ &u(x,y) = |x| \qquad\quad x^2+y^2=4 \end{aligned}$$

si chiede:

(1) determinare esplicitamente la soluzione,
(2) rappresentare la soluzione utilizzando il nucleo di Poisson,
(3) determinare il valore di $u(0,0)$,
(4) stimare superiormente e inferiormente il valore di $u(x,y)$ in $x^2+y^2 \le 4$,
(5) calcolarsi la media di $u(\cdot)$ sulla circonferenza di centro l'origine e raggio 1.

Soluzione In coordinate polari (r,θ), $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$, $r \le 2$, $\theta \in [-\pi,\pi]$, la soluzione $u(x(\theta,r),y(\theta,r)) := w(r,\theta)$ é soluzione di

$$\begin{aligned} &w_{rr} + \frac{1}{r}w_r + \frac{1}{r^2}w_{\theta\theta} = 0 \qquad r<2, \theta \in R \\ &w(2,\theta) = 2|\cos\theta| \qquad\qquad \theta \in R. \end{aligned}$$

Cerchiamo la soluzione come combinazione lineare di funzioni armoniche nel cerchio di raggio 2:

$$w(r,\theta) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n\ge1} r^n\left[A_n\cos n\theta + B_n \sin n\theta\right].$$

La funzione $f(\theta) := |\cos\theta|$ é una funzione pari per $\theta \in [-\pi,\pi]$, continua in $[-\pi,\pi]$ con derivata prima continua per $\theta \in [-\pi,\pi] \setminus \{\pm\frac{\pi}{2}\}$, $f(-\pi) = f(\pi)$. Quindi possiamo svilupparla in serie di Fourier

$$|\cos\theta| = \frac{a_0}{2} + \sum_{n\ge1} a_n \cos n\theta,$$

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi |cos\theta| d\theta = \frac{4}{\pi}, \\ a_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi |cos\theta| \cos n\theta d\theta, \end{aligned}$$

e la serie converge uniformemente in $[-\pi,\pi]$. Per calcolare a_n, si osservi che per $n>1$

$$\int \cos n\theta \cos\theta d\theta = \frac{n\cos\theta\sin n\theta - \cos n\theta \sin\theta}{n^2-1} + c.$$

Poiché

$$a_n = \frac{2}{\pi}\left\{\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos\theta\cos n\theta d\theta - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} cos\theta \cos n\theta d\theta\right\},$$

si deduce facilmente che

$$a_1 = 0, \qquad a_n = -\frac{2}{\pi}\frac{\cos n\frac{\pi}{2}}{n^2-1}, \qquad n>1.$$

Se n dispari $a_n = 0$, se n pari $\cos n\frac{\pi}{2} \ne 0$. Si ponga $n = 2m$, allora $\cos n\frac{\pi}{2} = \cos m\pi = (-1)^m$. In definitiva $a_n = 0$ se n dispari, se $n = 2m$ allora

$$a_{2m} = -\frac{2}{\pi}\frac{(-1)^m}{4m^2-1}$$

Poiché

$$w(2,\theta)=\frac{A_0}{2}+\sum_{n\geq 1}2^n\left[A_n\cos n\theta+B_n\sin n\theta\right]=2\left[\frac{a_0}{2}+\sum_{n\geq 1}a_n\cos n\theta\right],$$

si deduce

$$A_0=2a_0,\quad B_n=0\qquad A_n=2\left(2^{-n}a_n\right),\quad n\geq 1.$$

Quindi

$$w(r,\theta)=a_0+2\sum_{n\geq 1}2^{-n}r^n a_n\cos n\theta.$$

(2) Utilizzando l'integrale di Poisson si rappresenta la soluzione come:

$$w(r,\theta)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{2(2^2-r^2)|cos\phi|}{2^2+r^2-4r\cos(\theta-\phi)}d\phi.$$

(3) Il valore $u(0,0)$ é ovviamente

$$u(0,0)=a_0.$$

(4) Applicando il principio del massimo si ottiene

$$0\leq u(x,y)\leq 2\qquad (x,y)\in\{x^2+y^2\leq 4\}.$$

(5) la media da calcolare é $\frac{1}{2\pi}\int_{x^2+y^2=1}u(x,y)d\sigma$. Per il principio del valor medio si ottiene immediatamente che

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\{x^2+y^2=1\}}u(x,y)d\sigma=u(0,0)=a_0$$

Esercizio 2 (8 punti)
Si determini la soluzione dell'equazione

$$\begin{aligned}&u_{tt}=u_{xx} && 0<x<1, && t>0,\\ &u(x,0)=x, \quad u_t(x,0)=0; && \frac{\partial u}{\partial x}(0,t)=0, && u(1,t)=1. \quad t\geq 0.\end{aligned}$$

Si discuta la regolaritá della soluzione trovata. Si discuta inoltre la dipendenza dal tempo di

$$E(t)=\frac{1}{2}\int_0^1\left[u_x^2(x,t)+u_t^2(x,t)\right]\,dx.$$

Soluzione Si cerca una soluzione nella forma

$$u(x,t)=1+w(x,t)$$

con w soluzione di

$$\begin{aligned}&w_{tt}=w_{xx} && 0<x<1 \qquad 0<t\\ &w(x,0)=x-1; \quad w_t(x,0)=0; && \frac{\partial w}{\partial x}(0,t)=0 \qquad w(1,t)=0 \qquad t\geq 0.\end{aligned}\tag{2}$$

Si cerca la soluzione di (2) per separazione di variabile e dalle condizioni al bordo si deduce

$$w(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \cos(n-\frac{1}{2})\pi x[A_n \sin(n-\frac{1}{2})\pi t + B_n \cos(n-\frac{1}{2})\pi t]$$

con A_n e B_n costanti da determinare. Dalle condizioni al tempo $t=0$ si ottiene

$$w(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} \cos(n-\frac{1}{2})\pi x B_n = x-1,$$

$$w_t(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} (n-\frac{1}{2})\pi A_n \cos(n-\frac{1}{2})\pi x = 0 \quad \forall x \in [0,1].$$

Dall ultima relazione si deduce che $A_n = 0$ per $n \geq 1$. Inoltre poiché $f(x) = x-1$ é continua in $(0,1)$ con derivata prima continua si ha che

$$x-1 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n-\frac{1}{2})\pi x$$

dove

$$a_n = 2\int_0^1 (x-1)\cos(n-\frac{1}{2})\pi x dx,$$

e la convergenza é uniforme in $x \in [0,1]$. Si ottiene quindi che $B_n = a_n$. Quindi la soluzione é

$$u(t,x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n-\frac{1}{2})\pi x \cos(n-\frac{1}{2})\pi t.$$

Dalla regolaritá di $x-1$, si deduce che $|a_n| \leq \frac{C}{n^4}$ e quindi la soluzione é certamente $C^2([0,1]\times R)$.

Derivando rispetto al tempo $E(t)$ si ottiene

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}E(t) &= \frac{1}{2}\int_0^1 [2u_x u_{xt} + 2u_t u_{tt}]\, dx \\ &= u_x(1,t)u_t(1,t) - u_x(0,t)u_t(0,t) = 0.\end{aligned}$$

Si osservi che $u_t(1,t) = 0$ poiché $u(1,t) = 1$ é costante per $x = 1$. Quindi $E(t) = E(0) = \frac{1}{2}$.

Esercizio 3 (4 punti)
Si determini la soluzione dell'equazione

$$\begin{aligned}&u_{tt} = u_{xx} \qquad 0 < x, \qquad t > 0,\\ &u(x,0) = e^{-x^2}, \qquad u_t(x,0) = 0; \qquad \frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = 0, \qquad t \geq 0.\end{aligned}$$

Soluzione Poiché richiediamo $\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = 0$ la soluzione é la restrizione sul semiasse positivo della soluzione del problema in tutto l'asse reale con estensione pari dei dati iniziali. Nel caso in esame e^{-x^2} é una funzione pari. Quindi

$$\begin{aligned}&v_{tt} = v_{xx} \qquad x \in R, \qquad t > 0,\\ &v(x,0) = e^{-x^2}, \qquad u_t(x,0) = 0, \quad x \in R.\end{aligned}$$

La soluzione si ottiene quindi applicando la formula di D'Alembert

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[e^{-(x+t)^2} + e^{-(x-t)^2}]$$

.

Esercizio 4 (8 punti)
Determinare per quali valori di x e y la seguente equazione é parabolica, ellittica o iperbolica:

$$u_{yy} - yu_{xx} + 2u_x = 0.$$

Ridurla inoltre a forma canonica per $x \in R$, $y > 1$.

Soluzione La parte principale dell equazione é $u_{yy} - yu_{xx}$. Si ponga $a(x,y) := -y$, $b(x,y) = 0$, $c(x,y) = 1$. Si verifica immediatamente che

a) l'equazione é parabolica per $\{x \in R, y = 0\}$
c) l'equazione é ellittica per $\{x \in R, y < 0\}$
d) l'equazione é iperbolica per $\{x \in R, y > 0\}$
Per $\{x \in R, y > 1\}$ esistono due famiglie di linee caratteristiche soluzioni di

$$(\phi_y)^2 - y(\phi_x)^2 = 0.$$

Si assuma $\phi_x \neq 0$ poiché $\frac{dx}{dy} = -\frac{\phi_y}{\phi_x}$, si ottiene

$$\frac{dx}{dy} = \pm\sqrt{y}.$$

Le soluzioni sono

$$\frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}} - x = \eta; \qquad \frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}} + x = \xi,$$

con η e ξ arbitrari. Si deduce che

$$x = \frac{\xi - \eta}{2}; \qquad y = \left(\frac{3}{4}(\xi + \eta)\right)^{\frac{2}{3}}.$$

Poiche'

$$u_x = u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x, \quad u_y = u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y$$

$$u_{xx} = u_{\xi,\xi}\xi_x^2 + u_{\eta,\eta}\eta_x^2 + 2u_{\eta,\xi}\eta_x\xi_x + u_\xi\xi_{xx} + u_\eta\eta_{xx}$$

$$u_{yy} = u_{\xi,\xi}\xi_y^2 + u_{\eta,\eta}\eta_y^2 + 2u_{\eta,\xi}\eta_y\xi_y + u_\xi\xi_{yy} + u_\eta\eta_{yy}$$

Nel caso in esame otteniamo

$$\eta_x = -1, \quad \eta_{xx} = 0, \qquad \eta_y = y^{\frac{1}{2}}, \quad \eta_{yy} = \frac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}},$$

$$\xi_x = 1, \quad \xi_{xx} = 0, \qquad \xi_y = y^{\frac{1}{2}}, \quad \xi_{yy} = \frac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}}.$$

Quindi

$$u_{yy} = y[u_{\xi,\xi} + u_{\eta,\eta} + 2u_{\eta,\xi}] + \frac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}}[u_\xi + u_\eta],$$

$$u_{xx} = u_{\xi,\xi} + u_{\eta,\eta} - 2u_{\eta,\xi},$$

$$u_x = u_\xi - u_\eta,$$

$$y[u_{\xi,\xi} + u_{\eta,\eta} + 2u_{\eta,\xi}] + \frac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}}[u_\xi + u_\eta] - y[u_{\xi,\xi} + u_{\eta,\eta} - 2u_{\eta,\xi}] + 2[u_\xi - u_\eta] = 0,$$

$$4yu_{\eta,\xi} + \frac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}}[u_\xi + u_\eta] + 2[u_\xi - u_\eta] = 0,$$

quindi

$$4\left(\frac{3}{4}(\xi+\eta)\right)^{\frac{2}{3}} u_{\eta,\xi} + \frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}(\xi+\eta)\right)^{-\frac{1}{3}}[u_\xi + u_\eta] + 2[u_\xi - u_\eta] = 0.$$

Si noti che $\left(\frac{3}{4}(\xi+\eta)\right)^{\frac{2}{3}} > 1$. Si ottiende quindi che la forma canonica dell'equazione é

$$u_{\eta,\xi} + \frac{1}{8}\left(\frac{3}{4}(\xi+\eta)\right)^{-1}[u_\xi + u_\eta] + \frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}(\xi+\eta)\right)^{-\frac{2}{3}}[u_\xi - u_\eta] = 0.$$