FISICA MATEMATICA (FM2) , A.A. 2007/08

Esame 16 Gennaio

Esercizio 1 (8 punti) Trovare, se esiste, la soluzione di

$$x^2u_x - xyu_y + y = 0$$

tale che $u = 2s^2$ sulla curva γ di equazione parametriche $x = s, y = s$, con $1 \le s \le 2$. Per quali valori di x e y la soluzione é definita ?

Soluzione

La soluzione esiste (localmente) ed é unica poiché sulla curva γ

$$s^2 + s^2 = 2s^2 \neq 0.$$

Per determinare la soluzione troviamo le curve caratteristiche

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}x(t,s) = x^2\\
&\frac{d}{dt}y(t,s) = -xy\\
&\frac{d}{dt}z(t,s) = -y\\
&x(0,s) = s \qquad y(0,s) = s \qquad z(0,s) = 2s^2.
\end{aligned}$$

La soluzione della prima equazione é

$$x(t,s) = \frac{s}{1-ts} \tag{1}$$

Integrando la seconda si ottiene

$$y(t,s) = s(1-ts) \tag{2}$$

e quindi

$$z(t,s) = 2s^2 - st + \frac{1}{2}s^2t^2. \tag{3}$$

Ricavando s e t da (1) e (2) si ottiene

$$\sqrt{xy} = s, \qquad t = \frac{\sqrt{xy} - y}{xy}$$

e sostituendo in (3) otteniamo

$$u(x,y) = 2xy - \frac{\sqrt{xy} - y}{\sqrt{xy}} + \frac{1}{2}\frac{(\sqrt{xy} - y)^2}{xy}.$$

La soluzione esiste per $xy > 0$.

Esercizio 2 (8 punti) Si determini la soluzione dell'equazione

$$\begin{aligned}
&u_t = u_{xx} + e^{-t}\cos\frac{\pi}{2}x \qquad && 0 < x < 1 \qquad 0 < t\\
&u(x,0) = 0; \qquad \frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = 0, \qquad u(1,t) = 1. && t \ge 0.
\end{aligned}$$

Si determini il $\lim_{t\to\infty} \max_{x\in[0,1]} u(t,x)$.

Soluzione Si cerca la soluzione $u = 1 + v$ con v soluzione di

$$\begin{aligned} &v_t = v_{xx} + e^{-t}\cos\frac{\pi}{2}x \qquad 0<x<1 \qquad 0<t \\ &v(x,0) = -1; \qquad \frac{\partial v}{\partial x}(0,t) = 0, \qquad v(1,t) = 0, \qquad t \geq 0. \end{aligned} \tag{4}$$

Per determinare v si pone

$$v(x,t) = \sum_{k\geq 1} T_k(t)\cos(k-\frac{1}{2})\pi x$$

con le $T_k(t)$ tali che

$$v(x,0) = \sum_{k\geq 1} T_k(0)\cos(k-\frac{1}{2})\pi x = -1$$

soluzioni di

$$T_1'(t) = -[\frac{1}{2}\pi]^2 T_1(t) + e^{-t} \qquad k=1 \tag{5}$$

$$T_k'(t) = -[(k-\frac{1}{2})\pi]^2 T_k(t) \qquad k>1. \tag{6}$$

Dalla condizione al tempo $t=0$ si ottiene $T_k(0) = a_k$ con a_k tali che

$$-1 = \sum_{k\geq 1} a_k \cos(k-\frac{1}{2})\pi x,$$

$$a_k = -2\int_0^1 \cos(k-\frac{1}{2})\pi x dx.$$

Le soluzioni di (5) e (6) sono

$$T_1(t) = e^{-[(\frac{1}{2})\pi]^2 t} a_1 + \frac{4}{\pi^2-1}[e^{-t} - e^{-[(\frac{1}{2})\pi]^2 t}],$$

$$T_k(t) = e^{-[(k-\frac{1}{2})\pi]^2 t} a_k, \qquad k>1.$$

Si ottiene che $\lim_{t\to\infty} \max_{x\in[0,1]} v(t,x) = 0$ e quindi $\lim_{t\to\infty} \max_{x\in[0,1]} u(t,x) = 1$.

Esercizio 3 (9 punti) Determinare la soluzione di

$$\begin{aligned} &\Delta u(x,y) = \sin \pi x \quad (x,y)\in(0,1)\times(0,2); \\ &u(x,0) = 1, \quad u(x,2) = 0 \quad x\in[0,1], \\ &u(0,y) = 0, \qquad u(1,y) = 0 \quad y\in[0,2]. \end{aligned}$$

Sia $G(x,y)$ la funzione di Green nel rettangolo $(0,1)\times(0,2)$ con condizioni di Direchlet nulle sul bordo del rettangolo. Si rappresenti usando la funzione di Green la soluzione del problema.

Soluzione Spezziamo il problema in due sottoproblemi che presentino solo una disomogeneitá. Poniamo $u = f + g$ dove

$$\begin{cases} \Delta f = 0, \quad (x,y) \in (0,1) \times (0,2), \\ f(x,0) = 1, f(x,2) = 0 \quad x \in [0,1], \\ f(0,y) = 0, f(1,y) = 0 \quad y \in [0,2], \end{cases} \tag{7}$$

$$\begin{cases} \Delta g = \sin \pi x, \quad (x,y) \in (0,1) \times (0,2), \\ g(x,0) = 0, g(x,0) = 0 \quad x \in [0,1], \\ g(0,y) = 0, g(1,y) = 0, \quad y \in [0,2]. \end{cases} \tag{8}$$

Si osserva immediatamente che $g(x) = -\frac{1}{\pi^2} \sin(\pi x)$ é la soluzione di (8). Cerchiamo la f soluzione di (7) come

$$f(x,y) = v(x)w(y)$$

con $v(0) = v(1) = 0$. Sostituendo nell'equazione $\Delta u = 0$ si trova

$$v''(x)w(y) + v(x)w''(y) = 0$$

dividendo per $v(x)w(y)$ otteniamo che

$$\frac{v''(x)}{v(x)} = -\frac{w''(y)}{w(y)} = \lambda$$

con λ costante. Il problema agli autovalori per v é

$$\begin{aligned} v''(x) - \lambda v(x) = 0 \\ v(0) = v(1) = 0 \end{aligned}$$

si ottiene subito che per $\lambda \geq 0$ il problema ammette soltanto la soluzione banale, se $\lambda = -\mu^2 < 0$ $v(x) = C_1 \cos \mu x + C_2 \sin \mu x$ imponendo le condizioni $v(0) = 0 \Rightarrow C_1 = 0$, $v(1) = C_2 \sin \mu = 0 \Rightarrow \mu = k\pi, C_2$ arbitrario, con $k = 1, 2, \ldots$. Gli autovalori sono dunque $\lambda_k = -k^2 \pi^2$ con autofunzioni $v_k(x) = \sin k\pi x$. Risolviamo

$$w''(y) + \lambda_k w(y) = 0$$

con la condizione $w(0) = 1, \; w(2) = 0$. Si ottiene

$$w_k(y) = C_k \sinh(k\pi y) + D_k \cosh(k\pi y).$$

Pertanto

$$f(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} \sin(k\pi x) \Big(C_k \sinh(k\pi y) + D_k \cosh(k\pi y) \Big).$$

Imponendo le condizioni al bordo si ottiene

$$f(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} \sin(k\pi x) D_k = 1$$

$$f(x,2) = \sum_{k=1}^{\infty} \sin(k\pi x) \Big(C_k \sinh(k\pi 2) + D_k \cosh(k\pi 2) \Big) = 0.$$

Quindi $D_k = a_k$, $\forall\, k$ dove

$$a_k = 2 \int_0^1 \sin(k\pi x) dx,$$

sono i coefficienti della serie di Fourier della funzione costante 1 in $[0,1]$,

$$1 = \sum_{k \geq 1} a_k \sin(k\pi x)$$

e poiché $C_k \sinh(k\,\pi\,2) + a_k \cosh(k\,\pi\,2) = 0$, $\forall\, k$ si ottiene

$$C_k = -a_k \frac{\cosh(k\,\pi\,2)}{\sinh(k\,\pi\,2)}.$$

La soluzione di (7) é

$$f(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin(k\,\pi\,x)\Big(- \frac{\cosh(k\,\pi\,2)}{\sinh(k\,\pi\,2)} \sinh(k\,\pi\,y) + \cosh(k\,\pi\,y)\Big).$$

La soluzione del problema iniziale é quindi

$$u(x,y) = -\frac{1}{\pi^2} \sin(\pi\,x) + f(x,y).$$

Sia G la funzione di Green associata al problema, si ponga $z = (x,y)$ e $z' = (x', y')$, $Q = (0,1) \times (0,2)$ la soluzione si rappresenta come

$$u(z) = \int_Q G(z - z') \sin(\pi\,x') dz' - \int_0^1 \frac{\partial G}{\partial y'}(z - (x', 0)) dx'.$$

Si osservi che $\frac{\partial G}{\partial n} = -\frac{\partial G}{\partial y'}$ quando si considera il lato del quadrato $y = 0$, $x \in [0,1]$.

Esercizio 4 (5 punti)
Determinare per quali valori di x e y la seguente equazione é parabolica, ellittica o iperbolica:

$$y u_{xx} - x u_{yy} + u_x + x u_y = 0.$$

Ridurla inoltre a forma canonica quando $x = 0, y > 1$.

Soluzione si svolge in modo standard, simile al secondo compito di esonero.