FISICA MATEMATICA (FM2) , A.A. 2007/08
Secondo Esonero (7/01/08)

Esercizio 1 (10 punti)
Data l'equazione

$$\begin{aligned} &\Delta u(x,y) = 0 \qquad && x^2+y^2<4 \\ &u(x,y) = |x| && x^2+y^2=4 \end{aligned}$$

si chiede:

(1) determinare esplicitamente la soluzione,
(2) rappresentare la soluzione utilizzando il nucleo di Poisson,
(3) determinare il valore di $u(0,0)$,
(4) stimare superiormente e inferiormente il valore di $u(x,y)$ in $x^2+y^2 \leq 4$,
(5) calcolarsi la media di $u(\cdot)$ sulla circonferenza di centro l'origine e raggio 1.

Esercizio 2 (8 punti)
Si determini la soluzione dell'equazione

$$\begin{aligned} &u_{tt} = u_{xx} && 0<x<1, \qquad t>0, \\ &u(x,0) = x, \qquad u_t(x,0)=0; && \frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = 0, \qquad u(1,t) = 1. \qquad t \geq 0. \end{aligned}$$

Si discuta la regolaritá della soluzione trovata. Si discuta inoltre la dipendenza dal tempo di

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_0^1 \left[u_x^2(x,t) + u_t^2(x,t)\right]\, dx.$$

Esercizio 3 (4 punti)
Si determini la soluzione dell'equazione

$$\begin{aligned} &u_{tt} = u_{xx} && 0<x, \qquad t>0, \\ &u(x,0) = e^{-x^2}, \qquad u_t(x,0)=0; && \frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = 0, \qquad t \geq 0. \end{aligned}$$

Esercizio 4 (8 punti)
Determinare per quali valori di x e y la seguente equazione é parabolica, ellittica o iperbolica:

$$u_{yy} - y u_{xx} + 2u_x = 0.$$

Ridurla inoltre a forma canonica per $x \in R$, $y > 1$.