FISICA MATEMATICA (FM2) , A.A. 2007/08

Soluzioni Primo Esonero (9-11-07)

Esercizio 1 (10 punti) Verificare l'esistenza e determinare la soluzione $u(x, y)$ del problema

$$uu_x + (y+1)u_y = x$$
$$u(x,1) = \frac{1}{2}x$$

Soluzione Sia $z = u(x, y)$. Possiamo riscrivere l'equazione come

$$a(x,y,z)z_x + b(x,y,z)z_y = c(x,y,z)$$
$$z|_\gamma = \frac{1}{2}x$$

con $a(x, y, z) = z$, $b(x, y, z) = y + 1$, $c(x, y, z) = x$, γ la curva iniziale con rappresentazione parametrica $y = 1$, $x = s$, $s \in R$.

Poiché

$$a(x(s_0), y(s_0), z(s_0))\frac{dy}{ds}|_{s=s_0} - b(x(s_0), y(s_0), z(s_0))\frac{dx}{ds}|_{s=s_0} = -2$$

per ogni $s_0 \in R$, la soluzione esiste ed é unica in un intorno della curva γ. Le equazioni per le caratteristiche sono

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}x(t,s) = z \\ &\frac{d}{dt}y(t,s) = y+1 \\ &\frac{d}{dt}z(t,s) = x \\ &x(0,s) = s; \qquad y(0,s) = 1; \qquad z(0,s) = \frac{1}{2}s. \end{aligned} \tag{1}$$

Si noti che la prima e l'ultima equazione sono accoppiate. Le soluzioni del sistema lineare

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}x(t,s) = z \\ &\frac{d}{dt}z(t,s) = x \\ &x(0,s) = s, \qquad z(0,s) = \frac{1}{2}s \end{aligned}$$

sono $x(t, s) = Ae^t + Be^{-t}$, $z(t, s) = Ae^t - Be^{-t}$, con A e B dipendenti dalle condizioni iniziali. Si ottiene $x(0, s) = A + B = s$ e $z(0, s) = A - B = \frac{1}{2}s$. Si ricava immediatamente $A = \frac{3}{4}s$, $B = \frac{1}{4}s$. La soluzione é

$$x(t,s) = s\left(\frac{3}{4}e^t + \frac{1}{4}e^{-t}\right)$$

$$z(t,s) = s(\frac{3}{4}e^t - \frac{1}{4}e^{-t})$$

$$y(t,s) = 2e^t - 1$$

Poiché $e^t = \frac{y+1}{2}$ per $y > -1$ abbiamo

$$x = s\left(\frac{3}{4}\frac{y+1}{2} + \frac{1}{4}\frac{2}{y+1}\right)$$

Moltiplicando per $2(y+1)$ abbiamo

$$2x(y+1) = [\frac{3}{4}(y+1)^2 + 1]s$$

$$s = \frac{2x(y+1)}{\frac{3}{4}(y+1)^2+1}.$$

Sostituendo si ottiene

$$z(t(x,y), s(x,y)) = \frac{2x(y+1)}{\frac{3}{4}(y+1)^2+1}[\frac{3}{4}\frac{y+1}{2} - \frac{1}{4}\frac{2}{y+1}].$$

Esercizio 2 (7 punti) Verificare l'esistenza e determinare la soluzione $u(x,y)$ del problema

$$(x+1)u_x + xu_y = u$$
$$u(1,y) = y.$$

Soluzione Sia $z = u(x,y)$. Possiamo riscrivere l'equazione come

$$a(x,y,z)z_x + b(x,y,z)z_y = c(x,y,z)$$
$$z|_\gamma = x$$

con $a(x,y,z) = x+1$, $b(x,y,z) = x$, $c(x,y,z) = z$, γ la curva iniziale con rappresentazione parametrica $x = 1$, $y = s$, $s \in R$.

Poiché

$$a(x(s_0), y(s_0), z(s_0))\frac{dy}{ds}|_{s=s_0} - b(x(s_0), y(s_0), z(s_0))\frac{dx}{ds}|_{s=s_0} = 2$$

per ogni $s_0 \in R$, la soluzione esiste ed é unica in un intorno della curva γ. Le equazioni per le caratteristiche sono

$$\frac{d}{dt}x(t,s) = x+1$$
$$\frac{d}{dt}y(t,s) = x$$
$$\frac{d}{dt}z(t,s) = z$$
$$x(0,s) = 1; \qquad y(0,s) = s; \qquad z(0,s) = s.$$

La soluzione é $x(t,s) = 2e^t - 1$, $y'(t,s) = x(t,s) = 2e^t - 1 \Rightarrow y(t,s) = 2e^t - t + s - 2$, $z(t,s) = se^t$. Poiché $e^t = \frac{x+1}{2}$ quando $x+1 > 0$, $s = y+2-2e^t+t = y-x+1+\log\frac{x+1}{2}$ e quindi $z = u(x,y) = (y - x + 1 + \log\frac{x+1}{2})\frac{x+1}{2}$.

Esercizio 3 (8 punti) Sia $u(x,t)$ soluzione continua in $[0,\pi] \times [0,+\infty)$ del problema

$$u_t - u_{xx} = \sin\frac{x}{2} \qquad x \in (0,\pi), \quad t > 0$$
$$u(0,x) = \sin\frac{3}{2}x, \quad x \in [0,\pi]; \qquad u(t,\pi) = 1, \qquad u(t,0) = 0.$$

La soluzione u é non negativa? Risolvere

$$u_t - u_{xx} = \sin\frac{x}{2} \qquad x \in (0,\pi), \quad t > 0$$
$$u(0,x) = \sin\frac{3}{2}x, \quad x \in [0,\pi]; \qquad u_x(t,\pi) = 1, \qquad u(t,0) = 0.$$

con il metodo di separazione delle variabili.
Soluzione La frontiera parabolica $\partial_P([0,\pi]\times[0,\infty)) = \partial_P S$ é l'unione delle semirette $x=0$, $x=\pi$, $t>0$ e del segmento $0\le x\le\pi$, sull'asse x (t=0). Si osservi che $\sin\frac{x}{2}\ge 0$ per $x\in[0,\pi]$. Per il principio del massimo, u é non negativa in tutta la striscia se $u\ge 0$ su $\partial_P S$. Sulle semirette u é positiva; ma il dato iniziale $\sin\frac{3}{2}x$ é non negativo per $0\le x\le\frac{2}{3}\pi$. Concludiamo che u é negativa. Risolviamo il problema misto. Sia $u(x,t)=x+v(x,t)$, con v soluzione di

$$v_t - v_{xx} = \sin\frac{x}{2} \qquad x\in(0,\pi),\quad t>0$$
$$v(0,x)=\sin\frac{3}{2}x - x,\quad x\in[0,\pi];\qquad v_x(t,\pi)=0,\qquad v(t,0)=0.$$

Si ponga

$$v(x,t)=\sum_{n\ge 1} c_n(t)\sin\Big(n-\frac{1}{2}\Big)x,$$

con

$$\sum_{n\ge1}\Big[c_n'(t)+\Big(n-\frac{1}{2}\Big)^2 c_n(t)\Big]\sin(n-\frac{1}{2})x=\sin\frac{x}{2}$$

e tale che

$$v(x,0)=\sum_{n\ge1}c_n(0)\sin(n-\frac{1}{2})x=\sin\frac{3x}{2}-x=\sin\frac{3}{2}x+\sum_{n\ge1}b_n\sin\Big(n-\frac{1}{2}\Big)x,$$

con

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi(-x)\sin(n-\frac{1}{2})xdx.$$

Le funzioni c_n sono quindi soluzioni di:

$$c_1'(t)+\frac{1}{4}c_1(t)=1,\quad c_1(0)=b_1,$$

$$c_2'(t)+\frac{9}{4}c_2(t)=0,\quad c_2(0)=1+b_2,$$

$$c_n'(t)+\frac{(2n-1)^2}{4}c_n(t)=0,\quad c_n(0)=b_n,\quad n\ge3.$$

Si ottiene

$$c_1(t)=e^{-\frac{1}{4}t}(b_1-4)+4;$$
$$c_n(t)=e^{-(n-\frac{1}{2})^2t}b_n,\quad n\ge3;$$
$$c_2(t)=e^{-(\frac{3}{2})^2t}(b_2+1).$$

La soluzione é

$$u(x,t)=x+[e^{-\frac{1}{4}t}(b_1-4)+4]\sin\frac{x}{2}+e^{-(\frac{3}{2})^2t}(b_2+1)\sin\frac{3}{2}x+\sum_{n\ge3}e^{-(n-\frac{1}{2})^2t}b_n\sin\Big(n-\frac{1}{2}\Big).$$

Esercizio 4 (5 punti) Si determini la soluzione $u(x,t)$ di

$$u_t=u_{xx}+e^{-x^2}\cos t\quad x\in R, t>0$$
$$u(0,x)=x,\quad -L\le x\le L;\qquad u(0,x)=0,\quad |x|\ge L.$$

Si stimi $|u(0,t)|$.
Soluzione La soluzione é

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-L}^{L} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} y dy + \int_0^t ds \frac{1}{\sqrt{4\pi(t-s)}} \int_R e^{-\frac{|x-y|^2}{4(t-s)}} e^{-y^2} \cos s dy.$$

Si osservi che

$$u(0,t) = \int_0^t ds \frac{1}{\sqrt{4\pi(t-s)}} \int_R e^{-\frac{|x-y|^2}{4(t-s)}} e^{-y^2} \cos s dy.$$

Poiché $|e^{-y^2} \cos s| \leq 1$

$$|u(0,t)| \leq t.$$

Esercizio 5 (8 punti) Si determini la soluzione $u(x,t)$ di

$$\begin{aligned} & u_t = u_{xx} \qquad x \in (0,1), \quad t > 0 \\ & u(0,x) = x, \quad x \in [0,1]; \qquad u(t,0) = 0, \qquad u(t,1) = 5. \end{aligned}$$

Si calcoli il $\lim_{t\to\infty} u(x,t)$ per $x \in (0,1)$ e il tempo affinché $u(\frac{1}{2},t) = 3$.
Soluzione Si ponga

$$u(t,x) = 5x + v(t,x)$$

con v soluzione di

$$\begin{aligned} & v_t = v_{xx} \qquad x \in (0,1), \quad t > 0 \\ & v(0,x) = -4x, \quad x \in [0,1]; \qquad v(t,0) = 0, \qquad v(t,1) = 0. \end{aligned}$$

La soluzione v si determina per separazione di variabili

$$v(t,x) = \sum_{n\geq 1} b_n e^{-(n\pi)^2 t} \sin n\pi x.$$

con

$$b_n = 2\int_0^1 v(0,x) \sin n\pi x dx = -8\int_0^1 x \sin n\pi x dx.$$

Si ottiene facilmente

$$\lim_{t\to\infty} \sup_{x\in[0,1]} |u(t,x) - 5x| = 0.$$

Si deve verificare se esiste t tale che

$$u(t,\frac{1}{2}) = \frac{5}{2} + v(t,\frac{1}{2}) = 3.$$

Poiché $-5 \leq v(t,x) \leq 0$ si deduce che non esiste nessun valore di t tale che $u(t,\frac{1}{2}) = 3$.