Esecitazione FM2 -A.A. 2007-2008- 31-10-2007

Diffusione - Metodo di separazione delle variabili - principio del massimo

1. (PRINCIPIO DEL MASSIMO)
   Sia u soluzione del problema

$$\begin{cases} u_t(x,t) - u_{x\,x}(x,t) = 0 & 0 < x < 1, \;\; t > 0 \\ u(x,0) = \sin \pi\, x & 0 \le x \le 1 \\ u(0,t) = 2\,t\,e^{1-t},\; u(1,t) = 1 - \cos \pi\, t & t > 0. \end{cases} \tag{1}$$

   continua nella striscia $S = [0,1] \times [0,\infty)$.

   (a) Provare che u é non negativa.

   (b) Trovare una limitazione superiore per i valori $u(\frac{1}{2}, \frac{1}{8})$ e $u(\frac{1}{2}, 3)$.

2. (COMPORTAMENTO ASINTOTICO)
   Sia u soluzione continua nella semistriscia $S = [0,1] \times [0,\infty)$ del problema:

$$\begin{cases} u_t(x,t) - u_{x\,x}(x,t) = 0 & 0 < x < 1, \;\; t > 0 \\ u(x,0) = x(1-x) & 0 \le x \le 1 \\ u(0,t) = u(1,t) = 0 & t > 0. \end{cases} \tag{2}$$

   Dopo aver mostrato che u é non negativa, determinare due numeri positivi α, β in modo che

$$u(x,t) \le w(x,t) \equiv \alpha\, x(1-x)\, e^{-\beta\, t}.$$

   Dedurre che $u(x,t) \to 0$ uniformemente in $[0,L]$ per $t \to +\infty$.

3. (STATO STAZIONARIO E COMPORTAMENTO ASINTOTICO)
   Sia assegnato il seguente problema:

$$\begin{cases} u_t(x,t) - u_{x\,x}(x,t) = 1 & 0 < x < 1, \;\; t > 0 \\ u(x,0) = 0 & 0 \le x \le 1 \\ u(0,t) = u(1,t) = 0 & t > 0. \end{cases} \tag{3}$$

   (a) Determinare la soluzione stazionaria $u^s = u^s(x)$ che soddisfa le condizioni al bordo.

(b) Mostrare che $u(x,t) \leq u^s(x)$ per $t > 0$.

(c) Determinare $\beta > 0$ tale che $u(x,t) \geq (1 - e^{-\beta t})u^s(x)$.

(d) Dedurre che $u(x,t) \to u^s(x)$ per $t \to +\infty$ uniformemente su $[0,1]$.

(e) Risolvere il problema con il metodo di separazione delle variabili.

4. PROBLEMI IN DIMENSIONE MAGGIORE DI UNO
(CAUCHY-DIRICHLET NEL RETTANGOLO)

Utilizzando il metodo di separazione delle varibili si determini la soluzione $u = u(x,y,t)$ del problema:

$$\begin{cases} u_t(x,y,t) - (u_{xx}(x,y,t) - u_{yy}(x,y,t)) = 0 & 0 < x < a,\ 0 < y < b\ t > 0 \\ u(x,y,0) = g(x) & 0 \leq x \leq a,\ 0 \leq y \leq b, \\ u(0,y,t) = 0,\ u(a,y,t) = 0 & 0 < y < b,\ t > 0 \\ u(x,0,t) = 0,\ u(x,b,t) = 0 & 0 < x < a,\ t > 0. \end{cases} \tag{4}$$