Esecitazione FM2 -A.A. 2007-2008- 11-10-2007

Diffusione - Metodo di separazione delle variabili

1. (CAUCHY-DIRICHLET)
   Siano $D>0$, costante $g\in C^1([0,\pi])$, $g(0)=g(\pi)=0$. Risolvere con il metodo di separazione delle variabili il problema:

$$\begin{cases} u_t(x,t)-Du_{x\,x}(x,t)=0 & 0<x<\pi,\;\; t>0 \\ u(x,0)=g(x) & 0\le x\le\pi \\ u(0,t)=u(\pi,t)=0 & t>0. \end{cases} \tag{1}$$

2. (CAUCHY-NEUMANN)
   Siano $D>0$, costante $g\in C^1([0,\pi])$, $g'(0)=g'(\pi)=0$. Risolvere con il metodo di separazione delle variabili il problema:

$$\begin{cases} u_t(x,t)-Du_{x\,x}(x,t)=0 & 0<x<\pi,\;\; t>0 \\ u(x,0)=g(x) & 0\le x\le\pi \\ -u_x(0,t)=0,\;\; u_x(\pi,t)=0 & t>0. \end{cases} \tag{2}$$

3. Siano $D>0$, costante $g\in C^1([0,\pi])$, $g'(0)=g'(\pi)=0$. Risolvere con il metodo di separazione delle variabili il problema misto:

$$\begin{cases} u_t(x,t)-Du_{x\,x}(x,t)=0 & 0<x<\pi,\;\; t>0 \\ u(x,0)=2\sin\left(\frac{3}{2}x\right) & 0\le x\le\pi \\ u(0,t)=u_x(\pi,t)=0 & t>0. \end{cases} \tag{3}$$

   Trovare una formula esplicita per la soluzione con dato iniziale generico $u(x,0)=g(x)$.

4. (CAUCHY-NEUMANN; EQUAZIONE NON OMOGENEA)
   Utilizzando il metodo di separazione delle varibili si determini la soluzione del problema:

$$\begin{cases} u_t(x,t)-u_{x\,x}(x,t)=t\,x & 0<x<\pi,\;\; t>0 \\ u(x,0)=1 & 0\le x\le\pi \\ u_x(0,t)=0,\;\; u_x(\pi,t)=0 & t>0. \end{cases} \tag{4}$$

   Soluzioni Si tratta di un problema di $C-N$ non omogeneo con condizioni al bordo omogenee. Per ogni $T>0$ fissato $f(x,t)=t\,x$ é

limitata in $[0,\pi]\times[0,T]$, quindi esiste un'unica soluzione continua in $[0,\pi]\times[0,T]$ del problema.
Per usare il metodo di separazione delle varibili conviene considerare prima l'equazione omogenea e in particolare il problema agli autovalori associato: (ricordo che cerchiamo soluzioni non nulle della forma $u(x,t)=v(x)w(t)$)

$$\begin{cases} v''(x)-\lambda\, v(x)=0 \\ v'(0)=v'(\pi)=0 \end{cases} \tag{5}$$

con λ costante reale. Risolviamo il problema agli autovalori. Distinguiamo tre casi:

- $\lambda=\mu^2>0$, l'integrale generale é

  $$v(x)=C_1\, e^{\mu\, x}+C_2\, e^{-\mu\, x},$$

  imponendo le condizioni di Neumann abbiamo:

  $$\begin{cases} \mu\, C_1-\mu\, C_2=0 \\ e^{\mu\,\pi}C_1-e^{-\mu\,\pi}C_2=0 \end{cases} \tag{6}$$

  da cui $C_1=C_2=0$, quindi soluzione identicamente nulla.
- $\lambda=0$, abbiamo

  $$v(x)=C_1+C_2\, x,$$

  e imponendo le condizioni di Neumann ricaviamo $C_2=0$ e C_2 arbitraria, quindi soluzioni autofunzioni costanti.
- $\lambda=-\mu^2<0$, l'integrale generale é

  $$v(x)=C_1\cos\mu\, x+C_2\sin\mu\, x,$$

  $$v'(x)=-\mu\, C_1\,\sin\,\mu\,\sin\,\mu\, x+\mu\, C_2\,\cos\,\mu\, x,$$

  imponendo le condizioni di Neumann da $v'(0)=0$ ricaviamo che $C_2=0$; da $v'(\pi)=0$ otteniamo

  $$C_1\,\sin\,\mu\,\pi=0 \quad\Rightarrow\quad \mu=k\in\mathbb{N}, \quad C_2 \text{ arbitrario.}$$

  Ricaviamo che gli autovalori sono $\lambda_k=-k^2$ e le autofunzioni $v_k(x)=\cos\,k\,x$.

Scriviamo ora la candidata soluzione:

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k(t)\, v_k(x)$$

e imponiamo che

$$u_t - u_{x\,x} = \sum_{k=0}^{+\infty} [c_k'(t)\, v_k(x) - c_k(t)\ v_k''(x)] = \sum_{k=1}^{+\infty} [c_k'(t) + k^2 c_k(t)] v_k(x) = t\, x$$

ricordando che $v_k'' = -k^2\, v_k$, e

$$u(x,0) = \sum_{k=1}^{+\infty} c_k(0)\, v_k(x) = 1.$$

A questo punto sviluppiamo in serie di coseni la funzione $f(x) = x$:

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x \mathrm{d}x = \frac{1}{\pi} \frac{\pi^2}{2} = \frac{\pi}{2};$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x\ \cos\, n\, x \mathrm{d}x = \frac{2}{\pi} \Big[\frac{x\ \sin\, n\, x}{n} + \frac{\cos\, n\, x}{n^2} \Big]_0^{\pi} = \frac{2}{\pi\, n^2} [(-1)^n - 1];$$

$$b_n = \frac{2}{n} \int_0^{\pi} x\ \sin\, n\, x \mathrm{d}x = 0.$$

Da cui

$$f(x) = x = \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{\pi\, n^2} [(-1)^n - 1] \cos\, n\, x$$

$$= \frac{\pi}{2} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{\pi\, n^2} [(-1)^{n-1} + 1] \cos\, n\, x = \frac{\pi}{2} - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2}{\pi\, (2\, k + 1)^2} 2\ \cos\, (2\, k + 1)\, x$$

$$= \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2\, k + 1)^2} \cos\, (2\, k + 1)\, x$$

poiché $[(-1)^{n-1} + 1] = \begin{cases} 0 & \text{se } \ n = 2\, k \\ 2 & \text{se } \ n = 2\, k + 2. \end{cases}$

Abbiamo trovato che

$$x = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2\, k + 1)^2} \cos\, (2\, k + 1)\, x$$

con serie uniformemente convergente in $[0,\pi]$.

Dalle ultime equazioni ricaviamo:

$$u_t - u_{x\,x} = \sum_{k=1}^{+\infty}[c_k'(t) + k^2 c_k(t)]v_k(x) = t\,x = \frac{\pi\,t}{2} - \frac{4\,t}{\pi}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{(2\,k+1)^2}\cos(2\,k+1)\,x$$

e

$$u(x,0) = \sum_{k=1}^{+\infty} c_k(0)\,v_k(x) = 1$$

e otteniamo che le $c_k(t)$ sono soluzioni dei seguenti problemi di Cauchy:

$$\begin{cases} c_0'(t) = \frac{\pi}{2}t \\ c_0(0) = 1; \end{cases} \tag{7}$$

$$\begin{cases} c_{2\,k}'(t) + 4k^2\,c_{2\,k}(t) = 0 \\ c_k(0) = 0,\ \ k \geq 1; \end{cases} \tag{8}$$

$$\begin{cases} c_{2\,k+1}'(t) + (2\,k+1)^2 c_{2\,k+1}(t) = \frac{-4}{\pi}\frac{1}{(2\,k+1)^2}t \\ c_{2\,k+1}(0) = 0,\ \ k \geq 0. \end{cases} \tag{9}$$

Risolvendo i precedenti sistemi ricaviamo:

$$c_0(t) = \frac{\pi}{4}t^2 + 1;$$

$$c_2\,k = e^{-\frac{4}{3}k^2}C,$$

ma imponendo la condizione $c_{2\,k}(0) = 0$ risulta $c_{2\,k} = 0$;

$$c_{2\,k+1}(t) = e^{(2\,k+1)^2 t}\Big(\int e^{-(2\,k+1)^2 t}\Big(-\frac{4}{\pi}\frac{1}{(2\,k+1)^2}t\Big)\mathrm{d}t + C\Big)$$

$$= -\frac{4}{\pi}\frac{1}{(2\,k+1)^2}e^{(2\,k+1)^2 t}\Big(\int e^{-(2\,k+1)^2 t}\mathrm{d}t + C\Big)$$

$$= -\frac{4}{\pi}\frac{1}{(2\,k+1)^2}e^{(2\,k+1)^2 t}\Big(-\frac{1}{(2\,k+1)^2}e^{-(2\,k+1)^2 t}t - \frac{1}{(2\,k+1)^4}e^{-(2\,k+1)^2 t} + C\Big)$$

$$= -\frac{4}{\pi(2\,k+1)^4}\Big(t - \frac{1}{(2\,k+1)^2} + Ce^{(2\,k+1)^2 t}(2\,k+1)^2\Big)$$

e imponendo la condizione $c'_{2\,k+1}(0) = 0$ ricaviamo che $C = \frac{1}{(2\,k+1)^4}$ quindi

$$c_{2\,k+1}(t) = -\frac{4}{\pi(2\,k+1)^4}\Big(t + \frac{1}{(2\,k+1)^2}\Big(e^{(2\,k+1)^2 t} - 1\Big)\Big).$$

la soluzione é dunque

$$u(x,t) = \frac{\pi}{4}t^2 + 1 + \sum_{k=0}^{+\infty} c_{2\,k+1}(t)\cos{(2\,k+1)\,x}.$$

Analizziamo la soluzone trovata, poiché

$$\Big|\Big(e^{(2\,k+1)^2 t} - 1\Big)\cos{(2\,k+1)\,x}\Big| \leq 2$$

la serie

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{e^{(2\,k+1)^2 t} - 1}{(2\,k+1)^6}\cos{(2\,k+1)\,x},$$

la serie delle derivate parziali prime e seconde rispetto ad x e la serie della derivata parziale rispetto a t sono tutte uniformemente convergenti in $[0,\pi] \times [0,+\infty)$. Dunque é possibile scambiare le derivate con il simbolo di somma e quindi u é di classe C^2 in $[0,\pi] \times [0,+\infty)$. $\square$