Esecitazione FM2 -A.A. 2007-2008- 27-09-2007

Leggi di conservazione

1. Consideriamo il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} u_t(x,t) + u^2 u_x(x,t) = 0 & x \in \mathbb{R}, \quad t > 0 \\ u(x,0) = x & x \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{1}$$

   (a) Controllare se la famiglia di caratteristiche ammette inviluppo.

   (b) Trovare una formula esplicita della soluzione e studiarne l'estendibilitá in tutto il piano $x\,t$.

2. Consideriamo il seguente problema di traffico al semaforo:

$$\begin{cases} \rho_t(x,t) + v_m\Big(1 - \frac{2\,\rho(x,t)}{\rho_m}\Big)\rho_x(x,t) = 0 & x \in \mathbb{R}, \quad t > 0 \\ \rho(x,0) = \begin{cases} \rho_m & x > 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases} \end{cases} \tag{2}$$

   ρ densitá di auto, ρ_m densitá massima, v_m velocitá massima consentita. Determinare la soluzione e densitá di auto al semaforo per $t > 0$.

3. (MODELLO DEL TRAFFICO- DENSITÁ NORMALIZZATA)
   Sia ρ densitá che risolve il problema precedente. Posto $u(x,t) = \frac{\rho(x,t)}{\rho_m}$ dove $0 \le u \le 1$ é la densitá normalizzata, verificare che u risolve:

$$u_t(x,t) + v_m(1 - 2u(x,t))u_x(x,t) = 0.$$

   Determinare la soluzione del problema:

$$\begin{cases} u_t(x,t) + v_m\Big(1 - 2u(x,t)\Big)u_x(x,t) = 0 & x \in \mathbb{R}, \quad t > 0 \\ u(x,0) = g(x) = \begin{cases} \frac{1}{3} & x \le 0 \\ \frac{1}{3} + \frac{5\,x}{2} & 0 \le x \le 1 \\ \frac{3}{4} & x \ge 1. \end{cases} \end{cases} \tag{3}$$

Caratteristiche per equazioni lineari e quasilineari

1. Problema di Cauchy in 2-D
   Risolvere:
$$\begin{cases} u_x + x\,u_y = 0 & (x,y) \in \mathbb{R}^2 \\ u(x,0) = \cos\,y & y \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{4}$$

2. Calcolare, dove esiste, la soluzione $u = u(x,y)$ di
$$\begin{cases} u\,u_x + y\,u_y = x & (x,y) \in \mathbb{R}^2 \\ u(x,1) = 2\,x & x \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{5}$$

Lavoro a casa

1. Risolvere:
$$\begin{cases} \rho_t + q(\rho)_x = 0 & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ \rho(x,0) = g(x) \end{cases} \tag{6}$$
   dove $g(x) = \begin{cases} 1 & x < 0 \\ e^{-4} & x > 0 \end{cases}$ e $q(\rho) = \rho \log(\frac{1}{\rho})$.

   Soluzione Risulta $q'(\rho) = -1 - \log\,\rho$, per cui abbiamo
$$\begin{cases} \rho_t - (1 + \log\,\rho)\rho_x = 0 & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ \rho(x,0) = \begin{cases} 1 & x < 0 \\ e^{-4} & x > 0. \end{cases} \end{cases} \tag{7}$$
   La generica caratteristica uscente da $(\xi, 0)$ coincide con
$$x = \xi - t, \quad \text{per } \xi < 0$$
$$x = \xi + 3\,t, \quad \text{per } \xi > 0.$$
   Usando i dati iniziali otteniamo che
$$\rho(x,t) = \begin{cases} 1 & x < -t \\ e^{-4} & x > 3\,t. \end{cases} \tag{8}$$
   Ci rimane da analizzare ρ nella zona $\{\,(x,t) :\ -t \le x \le 3\,t\}$, abbiamo che $q''(\rho) = -\frac{1}{\rho} < 0$ ed essendo il dato iniziale decrescente cerchiamo una soluzione sotto forma di onda di rarefazione centrata nell'origine:
$$R(s) = (q')^{-1}(s),$$

tale onda é definita implicitamente da $\rho(x,t) = R(\frac{x}{t})$. Ricaviamo $q'(\rho) = -1 - \log\rho = s$, da cui $R(s) = e^{-(1+s)}$ e

$$\rho(x,t) = e^{-(1+\frac{x}{t})} \ \text{ per } -1 \le \frac{x}{t} \le 3.$$

Pertanto

$$\rho(x,t) = \begin{cases} 1 & x < -t \\ e^{-(1+\frac{x}{t})} & -1\,t \le x \le 3\,t \\ e^{-4} & x > 3\,t. \end{cases} \qquad \square$$

2. Calcolare, dove esistono, le soluzioni dei seguenti problemi:

   (a)
$$\begin{cases} x\,u_x + u_y = y & (x,y) \in \mathbb{R}^2 \\ u(x,0) = x^2 & x \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{9}$$

   Soluzione Posto $x = x(t),\ y = y(t)\ z = u(x(t), y(t))$, il sistema caratteristico é

$$\begin{cases} x'(t) = x(t) & x(0) = s \\ y'(t) = 1 & y(0) = 0 \\ z'(t) = y(t) & z(0) = s^2 \end{cases} \tag{10}$$

   da cui
$$\begin{cases} x(t,s) = s\,e^t \\ y(t,s) = t \\ z(t,s) = \frac{t^2}{2} + s^2. \end{cases} \tag{11}$$

   Ricaviamo $t = y$, $s = x\,e^{-y}$ e

$$u(x,t) = \frac{y^2}{2} + x^2\,e^{-2\,y}. \qquad \square$$

   (b)
$$\begin{cases} u_x - 2\;u_y = u & (x,y) \in \mathbb{R}^2 \\ u(0,y) = y & y \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{12}$$

   Soluzione Posto $x = x(t),\ y = y(t)\ z = u(x(t), y(t))$, il sistema caratteristico é
$$\begin{cases} x'(t) = 1 & x(0) = 0 \\ y'(t) = -2 & y(0) = s \\ z'(t) = z(t) & z(0) = s \end{cases} \tag{13}$$

da cui

$$\begin{cases} x(t,s) = t \\ y(t,s) = -2\,t + s \\ z(t,s) = s\,e^t. \end{cases} \tag{14}$$

Ricaviamo $t = x$, $s = 2\,x + y$ e

$$u(x,t) = (2\,x + y)^2\,e^x. \qquad \square$$

(c)

$$\begin{cases} u_x + 3\,u^2\,u_y = 1 & (x,y) \in \mathbb{R}^2 \\ u(x,0) = 0 & x \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{15}$$

Soluzione Posto $x = x(t),\ y = y(t)\ z = u(x(t), y(t))$, il sistema caratteristico é

$$\begin{cases} x'(t) = 1 & x(0) = s \\ y'(t) = 3\ z^2(t) & y(0) = 0 \\ z'(t) = 1 & z(0) = 0 \end{cases} \tag{16}$$

da cui

$$\begin{cases} x(t,s) = t + s \\ y(t,s) = t^3 \\ z(t,s) = t. \end{cases} \tag{17}$$

Ricaviamo $t = y^{\frac{1}{3}}$ e

$$u(x,t) = y^{\frac{1}{3}}. \qquad \square$$