AM5 2008: Tracce delle lezioni- 7

MISURA PRODOTTO E TEOREMA DI FUBINI

Siano μ, ν misure su X, Y, Σ_μ, Σ_ν le classi dei misurabili. Per ogni $S \subset X \times Y$ é

$$(\mu \times \nu)(S) := \inf\{\sum_j \mu(A_j)\nu(B_j) : \ S \subset \cup_j R_j, \ R_j := \ A_j \times B_j \in \Sigma_\mu \times \Sigma_\nu\}$$

$\rightarrow!$ $\quad L^{n+m}(\mathbf{R}^{n+m}) \ = \ L^n(\mathbf{R}^n) \times L^m(\mathbf{R}^m)$

Proposizione 1. $\mu \times \nu$ é misura (esterna) su $X \times Y$.

Dato S in $X \times Y$, le **sezioni** di S sono

$$\forall x \in X, \qquad S_x := \{y : (x,y) \in S\}, \qquad \forall y \in Y \qquad S^y := \{x : (x,y) \in S\}$$

É $\quad (\cup_j S_j)_x = \cup_j (S_j)_x, \qquad (\cap_j S_j)_x = \cap_j (S_j)_x.$

Indicato $\quad R = A \times B \in \Sigma_\mu \times \Sigma_\nu \quad$ un **rettangolo misurabile**, valgono le basilari relazioni

$$\nu(R_x) = \nu(B)\chi_A, \qquad \mu(A)\nu(B) \ = \ \int_X \nu(R_x)d\mu$$

Proposizione 2.

(i) $\quad (\mu \times \nu)(A \times B) \ = \ \mu(A)\nu(B), \ \ \forall R = A \times B \in \Sigma_\mu \times \Sigma_\nu$

(ii) $\quad R_1 \cap R_2 = \emptyset \Rightarrow (\mu \times \nu)(R_1 \cup R_2) \ = \ (\mu \times \nu)(R_1) \ + \ (\mu \times \nu)(R_2)$

(iii) $\quad \Sigma_\mu \times \Sigma_\nu \ \subset \ \Sigma_{\mu \times \nu}.$

Prova. (i) $R \subset \cup_j R_j$, $R_j \ = \ A_j \times B_j \in \Sigma_\mu \times \Sigma_\nu \ \Rightarrow \ \nu(R_x) \leq \sum_j \nu((R_j)_x) \quad \Rightarrow$ $\mu(A)\nu(B) \ \leq \ \sum_j \mu(A_j)\nu(B_j) \quad \Rightarrow \quad \mu(A)\nu(B) \ \leq \ (\mu \times \nu)(R) \ \leq \ \mu(A)\nu(B).$

(ii) Se $R_1 \cup R_2 \subset \cup \hat{R}_j, \ \ \hat{R}_j = \hat{A}_j \times \hat{B}_j \in \Sigma_\mu \times \Sigma_\nu$, allora $\nu((R_1)_x) + \nu((R_2)_x) =$

$$\nu((R_1 \cup R_2)_x) \leq \sum_j \nu((\hat{R}_j)_x) \Rightarrow (\mu \times \nu)(R_1) + (\mu \times \nu)(R_2) \leq \sum_j \mu(\hat{A}_j)\nu(\hat{B}_j)$$

$$\Rightarrow (\mu \times \nu)(R_1) + (\mu \times \nu)(R_2) \leq (\mu \times \nu)(R_1 \cup R_2)$$

(iii) Intanto $(\mu \times \nu)(R) \ = \ (\mu \times \nu)(R \cap Q) \ + \ (\mu \times \nu)(R \setminus Q) \ \ \forall R, Q \in \Sigma_\mu \times \Sigma_\nu$ in virtú di (ii), perché $R \setminus Q$ é unione di (due) rettangoli disgiunti misurabili.

Quindi, se $T \subset X \times Y$, $T \subset \cup_j R_j$, $R_j = A_j \times B_j \in \Sigma_\mu \times \Sigma_\nu$ é

$$(\mu \times \nu)(T \setminus R) + (\mu \times \nu)(T \cap R) \le (\mu \times \nu)(\cup_j (R_j \setminus R)) + (\mu \times \nu)(\cup_j (R_j \cap R)) \le$$

$$\le \sum_j [(\mu \times \nu)(R_j \setminus R) + (\mu \times \nu)(R_j \cap R)] =$$

$$= \sum_j (\mu \times \nu)(R_j) = \sum_j \mu(A_j)\nu(B_j)$$

e quindi, passando all'inf $\quad (\mu \times \nu)(T \setminus R) + (\mu \times \nu)(T \cap R) \le (\mu \times \nu)(T)$.

Nota. Abbiamo provato il **'Teorema di Fubini' per i rettangoli** (infatti per funzioni caratteristiche di rettangoli): se $R = A \times B$, allora

$$(\mu \times \nu)(R) = \mu(A)\nu(B) = \int \nu(R_x) d\mu = \int \mu(R^y) d\nu$$

Ció vale anche per un **plurirettangolo** $P = \cup_j R_j$ se R_j sono rettangoli disgiunti: $\nu(P_x) = \sum_j \nu(B_j)\chi_{A_j}$ é misurabile e, da $\sum_j (\mu \times \nu)(R_j) = \int \sum_j [\nu((R_j)_x)]\, d\mu$, segue

$$(*) \qquad (\mu \times \nu)(P) = \int \nu(P_x) d\mu = \int \mu(P^y) d\nu$$

Ora, ogni plurirettangolo $P = \cup_i R_i$, $R_i = A_i \times B_i \in \Sigma_\mu \times \Sigma_\nu$ si puó scrivere come unione di rettangoli disgiunti (se $\hat{R}_1 = R_1, \hat{R}_{n+1} = R_{n+1} \setminus \cup_{i=1}^n R_i$ é $\cup_j R_j = \cup_j \hat{R}_j$ e $\hat{R}_i$ si puó a sua volta scrivere come unione disgiunta di rettangoli misurabili!). Quindi $\nu(P_x)$ é misurabile e $(*)$ vale **per ogni plurirettangolo** P.

Lemma: Fubini per intersezioni di plurirettangoli.

Siano P_j plurirettangoli, $S = \cap_j P_j$. Sia $(\mu \times \nu)(P_1) < \infty$. Allora

(i) $x \to \nu(S_x)$, $\; y \to \mu(S^y)$ sono misurabili

(ii) $(\mu \times \nu)(S) = \int_X \nu(S_x)\, d\mu = \int_Y \mu(S^y)\, d\nu$

Prova. Se $P = \cup_j R_j$, $\hat{P} = \cup_j \hat{R}_j$ allora $P \cap \hat{P} = \cup_{ij} R_i \cap \hat{R}_j$ é plurirettangolo, e quindi, sostituendo eventualmente P_n con $\cap_{j=1}^n P_j$, possiamo supporre $P_{n+1} \subset P_n\ \forall n$. Quindi , da $(\mu\times\nu)(P_1) < \infty$ segue $(\mu\times\nu)(S) = \lim_j (\mu\times\nu)(P_j) = \lim_j \int_X \nu((P_j)_x) d\mu$. Siccome $\int_X \nu((P_1)_x) d\mu = (\mu \times \nu)(P_1) < \infty$, é $\nu((P_1)_x) < \infty \quad q.o.\ x$, e quindi $\nu((P_j)_x) \to \nu((\cap_j (P_j)_x) = \nu(S_x)$ per quasi ogni x e quindi $x \to \nu(S_x)$ é misurabile. Infine, $\lim_j \int_X \nu((P_j)_x) d\mu = \int_X \lim_j \nu((P_j)_x) d\mu$ (convergenza dominata!)

Proposizione 3 (Regolaritá della misura prodotto). Per ogni $T \subset X \times Y$ esistono P_i plurirettangoli misurabili tali che: $T \subset S := \cap_i P_i$, $(\mu\times\nu)(T) = (\mu\times\nu)(S)$

Se infatti $(\mu \times \nu)(T) < \infty$, $\forall i, \exists R_{ij} \in \Sigma_\mu \times \Sigma_\nu :\ T \subset \cup_j R_{ij} \ \forall i$, tali che $(\mu \times \nu)(T) + \frac{1}{i} \geq \sum_j (\mu \times \nu)(R_{ij}) \geq (\mu \times \nu)(\cup_j R_{ij}) \geq (\mu \times \nu)(\cap_i \cup_j R_{ij})$.

Teorema di Fubini I. Sia $S \in \Sigma_{\mu\times\nu}$, $S \subset \cup_j S_j$, $(\mu \times \nu)(S_j) < \infty \ \forall j$. Allora

(i) $S_x \in \Sigma_\nu \quad \mu - q.o.\, x, \qquad S^y \in \Sigma_\mu \quad \nu - q.o.\, y$

(ii) $x \to \nu(S_x), \qquad y \to \mu(S^y)$ sono misurabili

(iii) $\qquad (\mu \times \nu)(S) \quad = \quad \int\limits_X \nu(S_x)\, d\mu \quad = \quad \int\limits_Y \mu(S^y)\, d\nu$

Dimostrazione. Sia $S \subset \hat{S} = \cap_j P_j$ con $(\mu \times \nu)(S) = (\mu \times \nu)(\hat{S})$.

1.: $(\mu\times\nu)(S) = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 = (\mu\times\nu)(\hat{S}) = \int \nu(\hat{S}_x)\, d\mu \quad \Rightarrow \quad 0 = \nu(\hat{S}_x) \geq \nu(S_x) \quad q.o.\, x \ \Rightarrow \ x \to \nu(S_x)$ é misurabile e $(\mu \times \nu)(S) = 0 = \int \nu(S_x)\, d\mu$.

2.: $(\mu\times\nu)(S) < \infty \quad \Rightarrow \quad (\mu\times\nu)(\hat{S}\setminus S) = 0 \quad \Rightarrow \quad \nu((\hat{S}\setminus S)_x) = 0$ per quasi ogni $x \quad \Rightarrow \quad S_x = \hat{S}_x \setminus (\hat{S}\setminus S)_x \in \Sigma_\nu \quad q.o.\, x$ e $\nu(S_x) = \nu(\hat{S}_x)\ q.o.\, x$ é misurabile e $(\mu \times \nu)(S) = (\mu \times \nu)(\hat{S}) = \int \nu(\hat{S}_x)\, d\mu = \int \nu(S_x)\, d\mu$.

3.: Sostituendo S_n con $\cup_{j=1}^n S_j$ possiamo supporre $S_n \subset S_{n+1}$ e sostituendo S_n con $S_n \cap S$ possiamo supporre che $S = \cup_n S_n$. Ora, $(\mu \times \nu)(S_j) < \infty \quad \Rightarrow \quad S_x = \cup(S_j)_x \in \Sigma_\nu \quad q.o.\, x, \quad \nu(S_x) = \lim_j \nu((S_j)_x)$ é misurabile e $\int \nu(S_x) = \lim_j \int \nu((S_j)_x)\, d\mu = \lim_j (\mu \times \nu)(S_j) = (\mu \times \nu)(S)$.

NOTA. L'ipotesi di $(\mu \times \nu)\ \sigma-$ finitezza su S é essenziale (vedi Esercizio 1).

Teorema di Fubini II. Sia $\int_{X\times Y} |f|\, d(\mu \times \nu) < \infty$. Allora

(i) $x \to f(x,y)$, $y \to f(x,y)$ sono sommabili per quasi ogni x, (risp. per quasi ogni y)

(ii) $y \to \int_X f(x,y)\, d\mu$, $x \to \int_Y f(x,y)\, d\nu$ sono sommabili e

$$\int_Y \left(\int_X f(x,y)\, d\mu \right) d\nu = \int_X \left(\int_Y f(x,y)\, d\nu \right) d\mu = \int_{X\times Y} f\, d(\mu \times \nu)$$

Dimostrazione. Sia $S \in \Sigma_{\mu\times\nu}$, $(\mu\times\nu)(S) < \infty$. Da $\chi_S\,(x,y) = \chi_{S_x}\,(y)$ e dal Teorema di Fubini I segue

$$\int_{X\times Y} \chi_S \, d(\mu\times\nu) = (\mu\times\nu)(S) = \int\limits_X \nu(S_x)\, d\mu = \int\limits_X \left[\int\limits_Y \chi_{S_x}(y)\ d\nu \right] d\mu$$

Sia quindi $0 \le f = \sum_j \frac{1}{j}\chi_{S_j}$, $S_j \in \Sigma_{\mu\times\nu}$. Allora

$$\infty > \int_{X\times Y} f = \sum_j \frac{1}{j}(\mu\times\nu)(S_j) \quad \Rightarrow \quad (\mu\times\nu)(S_j) < \infty \ \ \forall j \quad \Rightarrow$$

$(S_j)_x \in \Sigma_\nu \ \forall j$, $\mu - q.o.\ x$, $x \to \nu((S_j)_x)$ sono misurabili e quindi

$$\int_{X\times Y} f\, d(\mu\times\nu) = \sum_j \frac{1}{j} \int_{X\times Y} \chi_{S_x}\, d(\mu\times\nu) = \sum_j \frac{1}{j} \int\limits_X \left[\int\limits_Y \chi_{(S_j)_x}(y)\ d\nu \right] d\mu =$$

$$= \int\limits_X \left[\int\limits_Y \sum_j \frac{1}{j}\ \chi_{(S_j)}(x,y)\ d\nu \right] d\mu = \int_X (\int_Y f(x,y) d\nu) d\mu$$

Analogamente,

$$\int_Y (\int_X \sum_j \frac{1}{j}\chi_{S_j}(x,y)\, d\mu)\, d\nu = \int_{X\times Y} f\, d(\mu\times\nu)$$

Per concludere:

$$\int f d(\mu\times\nu) = \int f^+ - f^- := \int_X (\int_Y f^+ d\nu) d\mu - \int_X (\int_Y f^- d\nu) d\mu = \int_X (\int_Y f d\nu) d\mu$$

NOTA. Lṕotesi $\int_{X\times Y} |f| < \infty$ é essenziale (vedi Esercizio 1).

Teorema di Fubini-Tonelli. Sia $\mu\times\nu$ σ finita, f $\mu\times\nu$ misurabile. Allora

$$\int_X (\int_Y |f|\, d\nu)\, d\mu < \infty \ \Rightarrow \ \int_{X\times Y} |f|\, d(\mu\times\nu) < \infty$$

e quindi valgono le conclusioni del Teorema di Fubibi II.

Basta osservare che l'ipotesi di σ finitezza assicura che, se $|f| = \sum_j \frac{1}{j}\chi_{S_j}$, agli S_j é applicabile il Teorema di Fubini I. La dimostrazione continua come per Fubini II.

NOTA L'ipotesi di σ finitezza é essenziale (vedi Esercizio 1).

INTEGRAZIONE IN $\mathbf{R}^N$

Nel seguito, con L^N indicheremo di regola la misura di Lebesgue in $\mathbf{R}^N$.

Ricordiamo che **la misura di Lebesgue in $\mathbf{R}^N$** ha le seguenti fondamentali proprietá (che in effetti la caratterizzano):

é misura boreliana regolare, invariante per traslazione
é finita sui compatti e positiva sugli aperti

Siccome $L^N(R) = vol(R)$ per ogni rettangolo R,

é invariante per riflessione e positivamente omogenea di grado N

Inoltre valgono le proprietá di approssimazione

$L^N(A) = \inf\{L^N(O) : \quad A \subset O, O \text{ aperto}\} \ \forall A \subset \mathbf{R}^N$

$L^N(E) = \sup\{L^N(K) : \quad K \subset E, K \text{ compatto}\} \ \forall E \subset \mathbf{R}^N$ Lebesgue misurabile

Dall'invarianza per traslazione segue l'

invarianza per traslazione dell'integrale

se $\quad \tau_h f(x) := f(x-h), \quad x, h \in \mathbf{R}^N, \quad$ allora

$$\tau_h f \quad \text{é misurabile} \quad \Leftrightarrow \quad f \quad \text{é misurabile} \quad \text{e} \quad \int_{\mathbf{R}^N} (\tau_h f) dL^N = \int_{\mathbf{R}^N} f dL^N$$

Dalla N-omogeneitá e dall'invarianza per riflessione seguono le regole di trasformazione

$$\int_{\mathbf{R}^N} f(tx) dL^N = t^{-N} \int_{\mathbf{R}^N} f(x) dL^N \quad \forall t > 0, \qquad \int_{\mathbf{R}^N} f(-x) dL^N = \int_{\mathbf{R}^N} f(x) dL^N$$

Le regole di trasformazione sopra indicate non sono che casi particolari della generale formula di cambio di variabile, ben nota nell'integrale di Riemann che coincide infatti , sulle funzioni continue a supporto compatto, con l'integrale di Lebesgue.

TEOREMI DI DENSITÁ
(approsimazione in media).

Approssimazione mediante funzioni semplici. Sia μ misura su $X, p \geq 1$. Allora

per ogni $f \in L^p$ esistono funzioni semplici φ_j tali che $\int |f - \varphi_j|^p \to_j 0$.

Infatti, se $0 \leq f = \lim_j \varphi_j$, $\varphi_j \leq f$ funzioni semplici, é $0 \leq \int (f - \varphi_j)^p \to_j 0$ (convergenza dominata). Basta poi scrivere $f = f^+ - f^-$.

Approssimazione di funzioni sommabili in $\mathbf{R}^n$ mediante funzioni $C_0(\mathbf{R}^N)$.

Approssimazione di funzioni caratteristiche. Sia $E \subset \mathbf{R}^N$ Lebesgue misurabile, $p \geq 1$. Se $L^n(E) < \infty$, allora

$\forall \epsilon > 0, \quad \exists \varphi_\epsilon \in C_0(\mathbf{R}^N) : \quad \int_{\mathbf{R}^N} |\varphi_\epsilon - \chi_E|^p \leq \epsilon.$

Basta ricordare che esistono K_ϵ compatto, O_ϵ aperto, tali che $K_\epsilon \subset E \subset O_\epsilon$ e $L^N(O_\epsilon \setminus K_\epsilon) \leq \epsilon$.
Sia $\delta > 0$ tale che $d(x, K_\epsilon) \leq \delta \Rightarrow x \in O_\epsilon$. Basta allora porre $\varphi_\epsilon(x) := \gamma(d(x, K_\epsilon))$ ove $\gamma \in C(\mathbf{R})$ con $\gamma(0) = 1$ e $\gamma(t) = 0$ se $t \geq \delta$.

3. Corollario . Se $\int_{\mathbf{R}^N} |f|^p < \infty$, esistono $f_j \in C_0$ tali che $\int_{\mathbf{R}^N} |f - f_j|^p \to_j 0$.

Segue subito da 1 e 2.

4. Corollario . $\int_{\mathbf{R}^N} |f| < \infty \Rightarrow \int_{\mathbf{R}^N} |f(x+h) - f(x)|^p \, dx \to_{|h| \to 0} 0$.

Ovvio se $f \in C_0$ (convergenza dominata). Poi,

$$f_j \in C_0(\mathbf{R}^N), \qquad \int |f - f_j|^p \to 0 \qquad \Rightarrow$$

$$\overline{\lim}_{|h|\to 0} (\int |f(x+h) - f(x)|^p)^{\frac{1}{p}} \leq$$

$$\leq \overline{\lim}_{|h|\to 0} [(\int |f(x+h) - f_j(x+h)|^p)^{\frac{1}{p}} + (\int |f_j(x+h) - f_j(x)|^p)^{\frac{1}{p}} + (\int |f_j(x) - f(x)|^p)^{\frac{1}{p}} \leq$$

$$\leq 2(\int |f_j(x) - f(x)|^p)^{\frac{1}{p}}$$

PRODOTTO DI CONVOLUZIONE.

Siano $f, g \in C_0(\mathbf{R}^N)$. É allora definita

$$(f * g)(x) := \int_{\mathbf{R}^N} f(x-y)\ g(y)\, dy, \quad x \in \mathbf{R}^N$$

$f * g$ si chiama prodotto di convoluzione di f e g. Valgono le seguenti proprietá:

(i) $f * g \; = \; g * f$

(ii) $f * g \in C_0(\mathbf{R}^N)$ con $\operatorname{supp}(f * g) \subset \operatorname{supp} f + \operatorname{supp} g$

(iii) $\int_{\mathbf{R}^N} |f * g| \leq \int_{\mathbf{R}^N} |f| \int_{\mathbf{R}^N} |g|$

La (i) si ottiene effettuando il cambio di variabile $z = x - y$.

La (ii) segue da: $x \notin \operatorname{supp} f + \operatorname{supp} g$, $y \in \operatorname{supp} g \Rightarrow x - y \notin \operatorname{supp} f$; la continuitá di $f * g$ segue dai teroremi di passaggio al limite sotto segno di integrale.

La (iii) segue da Fubini-Tonelli : $\int_{\mathbf{R}^N} |(f * g)(x)| dx \leq$

$$\int_{\mathbf{R}^N} \left(\int_{\mathbf{R}^N} |f(x-y)|\, |g(y)| dy \right) dx = \int_{\mathbf{R}^N} \left(\int_{\mathbf{R}^N} |f(x-y)|\, |g(y)| dx \right) dy = \int_{\mathbf{R}^N} |f| \int_{\mathbf{R}^N} |g|$$

Il prodotto di convoluzione si estende a funzioni $f, g \in L^1(\mathbf{R}^n)$. Osserviamo in primo luogo che $f(x-y)$ é misurabile in $\mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^N$. Infatti, se $f_j \in C_0(\mathbf{R}^n)$ sono tali che $f_j \to f$ in $L^1(\mathbf{R}^n)$ e $f_j(x) \to f(x)$ $\forall x \notin N$ ove N é un insieme di misura nulla, allora $f_j(x-y) \to f(x-y)$ $\forall (x,y) \notin p^{-1}(N)$ ove $p(x,y) := x - y$ e $p^{-1}(N)$ é di misura nulla in $\mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^N$ perché, se $N \subset B$ con B boreliano in $\mathbf{R}^N$ di misura nulla, allora $p^{-1}(B)$ é boreliano in $\mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^N$ ed ha, per Fubini, misura nulla, perché $[p^{-1}(B)]_y = y + B$. Anche in questo caso piú generale si ottengono, come sopra, le proprietá (i) e (iii). Piú in generale, se $p \geq 1$, si ha

$$f \in L^1, \quad g \in L^p \quad \Rightarrow \quad \|f * g\|_p \leq \|f\|_1 \|g\|_p$$

Infatti, se $p > 1$ e $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, si ha: $\left[\int_{\mathbf{R}^N} \left(\int_{\mathbf{R}^N} |f(x-y) g(y)| dy\right)^p dx\right]^{\frac{1}{p}} =$

$$\left[\int_{\mathbf{R}^N} \left(\int_{\mathbf{R}^N} |f(x-y)|^{\frac{1}{p}} |f(x-y)|^{\frac{1}{q}} |g(y)| dy\right)^p dx\right]^{\frac{1}{p}} \leq$$

$$\left[\int_{\mathbf{R}^N} \left(\int_{\mathbf{R}^N} |f(x-y)| |g(y)|^p dy\right) \left(\int_{\mathbf{R}^n} |f(x-y)| dy\right)^{\frac{p}{q}} dx\right]^{\frac{1}{p}} = \|f\|_1^{\frac{1}{p}} \|g\|_p \|f\|_1^{\frac{1}{q}}$$

AM5 2008: Esercizi e problemi-7

MISURA PRODOTTO E TEOREMA DI FUBINI

Esercizio 1. Siano $X = Y = [0,1]$

Siano μ la misura di Lebesgue e ν la misura che conta. Sia $D = \{(x,x) : x \in [0,1]\}$.

Provare che D é $\mu \times \nu$-misurabile e calcolare $(\mu \times \nu)(D)$.

Provare che $\nu(D_x)$ é μ-misurabile, che $\mu(D^y)$ é ν-misurabile.

É $\int_X \nu(D_x) d\mu = \int_Y \mu(D^y) d\nu$?

Esercizio 2. Siano $X = Y = [0,1]$ muniti della misura di Lebesgue . Siano

$$I_0 = [0, \frac{1}{2}], I_1 = [\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{1}{4}], \ldots I_n = [\frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2^n}, \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}}], \quad n \in \mathbf{N}$$

$$R_j = I_{j-1} \times I_{j-1}, \qquad \hat{R}_j = I_j \times I_{j-1}, \qquad j \in \mathbf{N}$$

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{2n-1} \chi_{R_n} - 2^{2n} \chi_{\hat{R}_n}$$

Mostrare che $\int_0^1 (\int_0^1 f(x,y)dx)dy$, $\int_0^1 (\int_0^1 f(x,y)dy)dx$ esistono entrambi ma sono diversi.

Perché non si applica in questo caso il Teorema Fubini-Tonelli?

Esercizio 3 Provare che $L^{n+m} = L^n \times L^m$

INTEGRAZIONE IN $\mathbf{R}^N$, CONVOLUZIONE

Problema 1. Sia μ, misura in $\mathbf{R}^n$ definita sulla classe dei Boreliani; μ si dice Borel regolare se per ogni Boreliano B risulta

(i) $\mu(B) = \inf\{\mu(O) : B \subset O, O \text{ aperto}\}$

(ii) $\mu(B) = \sup\{\mu(K) : K \subset B, K \text{ compatto}\}$

Provare che, se μ é Borel regolare, finita sui compatti e positiva sugli aperti, ed é invariante per traslazione, allora é un multiplo della misura di Lebesgue.

Problema 2 . Data f Lebesgue misurabile in $\mathbf{R}^n$, $t > 0$, sia $f_t(x) = f(tx)$. Provare che

(i)f_t è misurabile, $\quad f \in L^p \Rightarrow f_t \in L^p$ e $||f_t||_p = t^{-\frac{n}{p}}||f||_p$

Problema 3. Siano f, g sommabili in $\mathbf{R}^n$. Stabilire se é vero che

f, g pari/dispari $\Rightarrow$ $f * g$ é pari, $\quad$ f pari, g dispari $\Rightarrow$ $f * g$ é dispari

Problema 4. Sia $A \subset \mathbf{R}^N$. Provare che

(i) $B \subset \mathbf{R}^N$ boreliano di misura nulla $\Rightarrow \{(x, y) : \ x - y \in B\}$ ha misura nulla in $\mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^N$

Suggerimento. Usare Fubini..

(ii) $A \subset \mathbf{R}^N$ di misura nulla $\Rightarrow \{(x, y) : \ x - y \in A\}$ ha misura nulla in $\mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^N$

(iv) A Lebesgue misurabile in $\mathbf{R}^N \Rightarrow \{(x, y) : \ x - y \in A\}$ é Lebesgue misurabile in $\mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^N$

Suggerimento. Considerare B boreliano in $\mathbf{R}^N$ tale che $A \subset B, L^N(A) = L^N(B)$..

Problema 5 Sia $f : \mathbf{R}^N \to \mathbf{R}$ Lebesgue misurabile. Provare che $(x,y) :\to f(x-y)$ é Lebesgue misurabile in $\mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^N$

Suggerimento. Scrivere, per $f \geq 0$, $f(x) = \sum_j \frac{1}{j}\chi_{A_j}, f(x-y) = ...$ ed usare l'esercizio precedente (nota che $\chi_A(x-y) = \chi_{\{(x,y):\ x-y\in A\}}$).

Problema 6. Sia f sommabile in $\mathbf{R}^n$. Provare che

$$f * \varphi = 0 \quad \forall \varphi \in C_0^\infty \Rightarrow f = 0\, q.o.$$

Problema 7. Provare che

$$f \in L^1(\mathbf{R}^N), \quad |g(x)| \leq c \quad \Rightarrow \quad g * f \quad \text{é ben definita e continua}$$

Mostrare, utilizzando le funzioni $f = g = x^{-\frac{2}{3}}\chi_{[0,1]}$, che l'ipotesi di limitatezza su g é essenziale.

Problema 8. Provare che

$$f, g \in L^1(\mathbf{R}^N), \quad |g(x)| \leq c \quad \Rightarrow \quad (g * f)(x) \to_{|x|\to+\infty} 0$$

Mostrare che l'ipotesi di limitatezza su g é essenziale.

Esercizio 1. Siano $f(x) = \frac{1}{\sqrt{|x|}}\chi_{[-1,1]}$, $g(x) = \sum_n n^\alpha \chi_{[n, n+\frac{1}{n^\beta}]}$. Stabilire se , per $\beta > \alpha + 1$, $f * g$ é limitata

Esercizio 2. Sia f sommabile in $\mathbf{R}^n$, $r > 0$. Provare che

$$x \to \int_{B_r(x)} f(y)dy$$

é continua e dotata di massimo su tutto $\mathbf{R}^N$. Provare infine che

$$r \to \max_{\mathbf{R}^N} \int_{B_r(x)} f(y)dy$$

é continua.

Esercizio 3. Sia $f(x) = \sqrt{\frac{1}{|x|(1+\log^2|x|)}}, x \in \mathbf{R}$. Provare che

(i) $f \in L^p$ se e solo se $p = 2$

(ii) $f \star \chi_{[-1,1]} \in L^p$ se e solo se $p \geq 2$.

AM5: Esercizi e problemi- 8

CENNI DI SOLUZIONE

Esercizio 1. $D = \cap_n \cup_{i=1}^n [\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}] \times [\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}]$. Dunque D é misurabile nel prodotto.

Poi, $\nu(D_x) \equiv 1, \quad \mu(D^y) \equiv 0, \quad \int_X \nu(D_x) d\mu = 1 \neq 0 = \int_Y \mu(D^y) d\nu.$

Esercizio 2. $y \in I_{n-1} \quad \Rightarrow$

$$\int_0^1 f(x,y)dx = \frac{2^{2n-1}}{2^n} - \frac{2^{2n}}{2^{n+1}} = 0 \quad \Rightarrow \int_0^1 (\int_0^1 f(x,y)dx)dy = 0$$

mentre $\quad 0 \le x \le \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \int_0^1 (\int_0^1 f(x,y)dy \equiv 1$

$$\frac{1}{2} < x \le 1 \quad \Rightarrow \int_0^1 f(x,y)dy \equiv -2^n + 2^n = 0 \quad \Rightarrow \quad \int_0^1 (\int_0^1 f(x,y)dy)dx = \frac{1}{2}$$

Esercizio 3 Basta considerare il caso $n = m = 1$.

Basta provare che $L^2 \le L^1 \times L^1$. Sia $A \subset \mathbf{R}^2$ tale che $(L^1 \times L^1)(A) < +\infty$ e sia quindi $A \subset \cup_j A_j \times B_j \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ Lebesgue misurabili tali che $\sum_j L^1(A_j) L^1(B_j) < +\infty$. Siano quindi $A_j \subset \cup_i I_{ij}, \; B_j \subset \cup_k J_{kj}$ con

$$\sum_i l(I_{ij}) \le L^1(A_j) + \epsilon a_j, \; \sum_k l(J_{kj}) \le L^1(B_j) + \epsilon b_j$$

per cui $A \subset \cup_{ikj} I_{ij} \times J_{kj}$ e quindi

$$L^2(A) \le \sum_{ikj} l(I_{ij}) \; l(J_{kj}) \le \sum_j (L^1(A_j) + \epsilon a_j) \; (L^1(B_j) + \epsilon b_j) =$$

$$= \sum_j [L^1(A_j) \; (L^1(B_j)] + \epsilon \sum_j [L^1(A_j) b_j + L^1(B_j) a_j] + \epsilon^2 \sum_j a_j b_j$$

Prendendo $a_j = L^1(A_j), \; b_j = L^1(B_j)$ troviamo

$$L^2(A) \le (1+\epsilon)^2 \sum_j [L^1(A_j) \; (L^1(B_j)]$$

e quindi $L^2(A) \le (1+\epsilon)^2 (L^1 \times L^1)(A)$.

INTEGRAZIONE IN $\mathbf{R}^N$, CONVOLUZIONE

Problema 1 . Sia $h \in C_0^\infty(\mathbf{R}^N)$ tale che $\int h dL^N = 1$.

Per ogni $f \in C_0^\infty(\mathbf{R}^N)$ risulta, usando Fubini applicato alla misura prodotto $\nu \times L^N$ e l'invarianza per traslazione:

$$\int f d\mu =$$

$$\int (\int f(y) d\mu) h(x) dL^N = \int (\int f(x+y) d\mu) h(x) dL^N = \int (\int f(x+y) h(x) dL^N) d\mu =$$

$$= \int (\int f(x) h(x-y) dL^N) d\mu = \int (\int h(x-y) d\mu) f(x) dL^N =$$

$$= c \int f dL^N$$

ove $c := \int h d\mu$. Dalle proprietá (i)-(ii) segue, come nel caso della misura di Lebesgue, che $C_0^\infty(\mathbf{R}^N)$ é denso in $L^1(\mu)$, e quindi

$$\int_E d\mu = c \int_E dL^N \quad \forall E \quad \text{boreliano}$$

Problema 3. Se f, g sono entrambe pari o entrambe dispari, risulta

$$(f*g)(-x) = \int f(-x-y) g(y) dy = \int f(x+y) g(-y) dy = \int f(x-z) g(z) dz = (f*g)(x)$$

Allo stesso modo si vede che, se f, g sono l'una pari e l'altra dispari, allora $f * g$ é dispari.

Problema 4. Sia $B \subset \mathbf{R}^N$ boreliano, $p : (x, y) \to x - y$. Siccome p é continua, $p^{-1}(B)$ é boreliano:

$\mathcal{A} :=\{A \subset \mathbf{R}^N : p^{-1}(A)$ é boreliano $\}$ contiene i boreliani, perché (come si vede subito) $\mathcal{A}$ é σ - algebra e contiene i chiusi (p é continua!).

(i) Si puó quindi applicare Fubini all'insieme misurabile $p^{-1}(B)$:

$$[p^{-1}(B))]_x = x - B \quad \Rightarrow \quad L^N([p^{-1}(B))]_x) = 0 \quad \forall x \quad \Rightarrow$$

$$(L^N \times L^N)(p^{-1}(B)) = \int L^N(x-B)dL^N(x) = 0$$

(ii) Se $A \subset B, L^N(B) = 0, B$ boreliano, da $p^{-1}(A) \subset p^{-1}(B)$ ed (i) segue che $p^{-1}(A)$ ha misura nulla

(iii) Sia A di misura finita, $A \subset B$ boreliano con $L^N(A) = L^N(B)$ e quindi $B \setminus A$ ha misura nulla. Da

$$p^{-1}(A) = p^{-1}(B \setminus (B \setminus A)) = p^{-1}(B) \setminus p^{-1}(B \setminus A)$$

segue che $p^{-1}(A)$ é misurabile, perché, per (ii), $p^{-1}(B \setminus A)$ ha misura nulla e $p^{-1}(B)$ é (addirittura) boreliano.

Problema 6. In particolare,

$$\int f(y)g(-y)dy = 0 \quad \forall g \in C_0^\infty$$

Ora, se E é misurabile di misura finita, per ogni $\epsilon > 0$ esistono $K_\epsilon \subset E \subset O_\epsilon$ (rispettivamente compatto ed aperto) con $L^N(O_\epsilon) - \epsilon \leq L^N(E) \leq L^N(K_\epsilon) + \epsilon$. Quindi

$$\exists \quad \varphi_n \in C_0^\infty, \quad 0 \leq \varphi_n \leq 1 : \quad \varphi_n \to_n \chi_E \quad q.o. \quad \text{e quindi} \quad \|\varphi_n - \chi_E\|_{L^1} \to_n 0$$

e quindi $\displaystyle\int f\chi_E = 0 \quad \forall E$ misurabile. Concludiamo che $f = 0$

Problema 7. $\int |f(x-y)g(y)|dy \leq c \int |f| \quad \forall x$ e quindi $f * g$ é definita $\forall x$ e

$$|(f*g)(x+h)-(f*g)(x)| \leq c\int |f(x+h-y)-f(x-y)|dy = \int |f(z+h)-f(z)|dz \to_{|h|\to 0} 0$$

Infine, siano $f = g = x^{-\frac{2}{3}}\chi_{[0,1]} \in L^1(\mathbf{R})$

É $f * g \in L^1, (f*g)(x) = 0$ se $x \leq 0$ oppure $x \geq 2$ mentre $0 < x < 1 \quad \Rightarrow$

$$(f*g)(x) = \int_0^1 \frac{1}{(x-y)^{\frac{2}{3}}}\chi_{[0,1]}(x-y)\frac{1}{y^{\frac{2}{3}}}dy = \int_0^x \frac{1}{(x-y)^{\frac{2}{3}}} \frac{1}{y^{\frac{2}{3}}}dy >$$

$$\int_0^x \frac{1}{x^{\frac{2}{3}}}\frac{1}{y^{\frac{2}{3}}}dy = \frac{1}{3}\frac{1}{x^{\frac{2}{3}}}y^{\frac{1}{3}}|_0^x = \frac{1}{3}\frac{1}{x^{\frac{1}{3}}} \to_{x\to 0^+} +\infty$$

Problema 8. Fissati $k > 0$, $x \in \mathbf{R}^N$, e posto $A(k) := \{z : \ |f(z)| \geq k\}$, $A(k,x) := \{y : \ |f(x-y)| \geq k\} = x - A(k)$, risulta, per ogni $R > 0$

$$\int |f(x-y)g(y)|dy \leq \|g\|_\infty \int\limits_{|y|\leq R} |f(x-y)|dy + \|g\|_\infty \int\limits_{A(k,x)} |f(x-y)|dy + k \int\limits_{|y|\geq R} |g(y)|dy$$

Siccome $\int |f(y)|dy \geq \int\limits_{A(k)} |f(z)|dz \geq kL^N(A(k)) \quad \Rightarrow \quad L^N(A(k)) \to_{k\to+\infty} 0$, si ha

$$(\star) \qquad \int\limits_{A(k,x)} |f(x-y)|dy = \int\limits_{A(k)} |f(z)|dz \to_{k\to+\infty} 0 \qquad \text{Dunque,}$$

$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists k_\epsilon, \quad R_\epsilon : \quad \|g\|_\infty \int\limits_{A(k_\epsilon,x)} |f(x-y)|dy \leq \epsilon, \qquad k_\epsilon \int_{|y|\geq R_\epsilon} |g| \leq \epsilon$$

e quindi
$$\limsup_{|x|\to+\infty} \int |f(x-y)\, g(y)|dy \leq \|g\|_\infty \limsup_{|x|\to+\infty} \int\limits_{|y|\leq R_\epsilon} |f(x-y)|dy \ + \ 2\epsilon$$

$$= \|g\|_\infty \limsup_{|x|\to+\infty} \int\limits_{B_{R_\epsilon}(x)} |f(z)|dz \ + \ 2\epsilon = 2\epsilon$$

Controesempio: lo stesso del Problema 8.

Esercizio 1 . É $\int g = \sum_n \frac{n^\alpha}{n^\beta} < +\infty$ se $\beta - \alpha > 1$. Poi,

$$(f * g)(x) = \sum_n n^\alpha \int_{x-n-\frac{1}{n^\beta}}^{x-n} f(t)dt \quad \text{e} \quad 2\alpha > \beta > \alpha + 1 \quad \Rightarrow$$

$$(f * g)(k + \frac{1}{k^\beta}) = k^\alpha \int_0^{\frac{1}{k^\beta}} f(t)dt = \frac{1}{2} k^\alpha \sqrt{t}|_0^{\frac{1}{k^\beta}} = \frac{1}{2} k^{\alpha - \frac{\beta}{2}} \to_n +\infty$$

Esercizio 2. Se $\int_{B_r(x)} f(y)dy = 0 \quad \forall x$ allora il massimo é zero ed é realizzato in ogni punto. Se no, $\sup_x \int_{B_r(x)} f(y)dy > 0$. Ma

$$I(x) := \int_{B_r(x)} f(y)dy = \int f(y)\, \chi_{B_r(x)}(y)dy = \int f(y)\chi_{B_r}(x-y)dy = (f * \chi_{B_r})(x)$$

é continua in x (Problema 8) e va a zero all'infinito (Problema 9). Per il teorema di Weierstrass, I é dotata di massimo, diciamo

$$\sup_x \int_{B_r(x)} f(y)dy = \int_{B_r(x_r)} f(y)dy$$

Poi, per l'assoluta continuitá dell'integrale

$$\forall \epsilon,\ \exists \delta_\epsilon : \quad |r-\rho| \le \delta_\epsilon \quad \Rightarrow \quad |\int_{B_r(x)} f(y)dy - \int_{B_\rho(x)} f(y)dy| \le \epsilon \quad \forall x \quad \Rightarrow$$

$$|\int_{B_r(x_r)} f(y)dy - \int_{B_\rho(x_\rho)} f(y)dy| \le$$

$$|\int_{B_r(x_r)} f(y)dy - \int_{B_\rho(x_r)} f(y)dy| + |\int_{B_\rho(x_r)} f(y)dy - \int_{B_\rho(x_\rho)} f(y)dy| \le 2\epsilon$$

Esercizio 3.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f^p(x)\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{|x|^{\frac{p}{2}}(1+\log^2|x|)^{\frac{p}{2}}} = +\infty$$

se $p \neq 2$, perché se $p < 2$ f^p va a zero per x che va all'infinito , piú lentamente di $\frac{1}{|x|}$ mentre se $p > 2$ va all'infinito , per x che va a zero, piú rapidamente di $\frac{1}{|x|}$.

Infine,

$$f^2 \le \frac{1}{|x|\log^2|x|}$$

che é integrabile in zero e all'infinito perché $\frac{d}{dx}\frac{1}{\log x} = -\frac{1}{x\log^2 x}$.

Poi $$(f \star \chi_{[-1,1]})(x) = \int_{x-1}^{x+1} \frac{dt}{\sqrt{|t|\,(1+\log^2|t|)}}$$

é una funzione continua, di potenza p-esima sommabile sse $p \ge 2$ perché

$$\frac{2}{\sqrt{(x+1)\,(1+\log^2(x+1))}} \le \int_{x-1}^{x+1} \frac{dt}{\sqrt{|t|\,(1+\log^2|t|)}} \le \frac{2}{\sqrt{(x-1)\,(1+\log^2(x-1))}}$$

AM5 2008: Tracce delle lezioni- 8

DISEGUAGLIANZA DI YOUNG

Siano $p > 1$, $q, r \geq 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = 2$. Allora

$$|\int_{\mathbf{R}^n} f(x)\,(g * h)(x)dx| = |\int_{\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n} f(x)\,g(x-y)\,h(y)\,dxdy| \leq \|f\|_p\,\|g\|_q\,\|h\|_r$$

$\forall f \in L^p(\mathbf{R}^n)$, $g \in L^q(\mathbf{R}^n)$, $h \in L^r(\mathbf{R}^n)$. In particolare, se $\frac{1}{s} = \frac{1}{q} + \frac{1}{r} - 1$

allora $\quad g \in L^q(\mathbf{R}^n), \quad h \in L^r(\mathbf{R}^n) \quad \Rightarrow \quad \|g*h\|_s \leq \|g\|_q\,\|h\|_r$

Prova. Se p', q', r' sono gli esponenti coniugati, allora

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{q'} + \frac{1}{r'}, \quad \frac{1}{q} = \frac{1}{p'} + \frac{1}{r'}, \quad \frac{1}{r} = \frac{1}{q'} + \frac{1}{p'}, \qquad \frac{1}{p'} + \frac{1}{q'} + \frac{1}{r'} = 1$$

Dalla diseguaglianza di Holder generalizzata e quindi Fubini

$$|\int_{\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n} f(x)g(x-y)h(y)dxdy| \leq$$

$$\leq \int_{\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n} |f(x)|^{\frac{p}{r'}} \times |f(x)|^{\frac{p}{q'}} \times |g(x-y)|^{\frac{q}{p'}} \times |g(x-y)|^{\frac{q}{r'}} \times |h(y)|^{\frac{r}{p'}} \times |h(y)|^{\frac{r}{q'}} dxdy \leq$$

$$\leq \left(\int_{\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n} |f(x)|^p |g(x-y)|^q dxdy\right)^{\frac{1}{r'}} \times \left(\int_{\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n} |f(x)|^p |h(y)|^r dxdy\right)^{\frac{1}{q'}} \times$$

$$\times \left(\int_{\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n} |h(y)|^r |g(x-y)|^q dxdy\right)^{\frac{1}{p'}} =$$

$$\|f\|_p^{\frac{p}{r'}}\ \|g\|_q^{\frac{q}{r'}}\ \|f\|_p^{\frac{p}{q'}}\ \|h\|_r^{\frac{r}{q'}}\ \|h\|_r^{\frac{r}{p'}}\ \|g\|_q^{\frac{q}{p'}} = \|f\|_p\ \|g\|_q\ \|h\|_r$$

NOTA. La condizione $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = 2$ é necessaria, in quanto la diseguaglianza deve essere invariante rispetto al cambio di scala $x' = tx, y' = ty$: il primo membro cambia per un fattore t^{-2n}, mentre il secondo cambia per un fattore $t^{-n(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r})}$.

Il caso limite: $\frac{1}{q} + \frac{1}{r} = 1$ Siano $q, r \geq 1$, $\frac{1}{q} + \frac{1}{r} = 1$. Allora

$$g \in L^q(\mathbf{R}^n), \quad h \in L^r(\mathbf{R}^n) \quad \Rightarrow \quad h * g \in C(\mathbf{R}^n) \quad \text{e} \quad \sup_{|x| \geq R} |h * g|(x) \to_{R \to +\infty} 0$$

Intanto, $\int |g(x-y)|\,|h(y)|dy \le \|g\|_q\,\|h\|_r \quad \forall x.$ Siano poi $g_\epsilon, h_\epsilon \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ tali che $\|g-g_\epsilon\|_q + \|h_\epsilon - h\|_r \le \epsilon.$ Da Holder

$$|(g*h)(x)-(g_\epsilon*h_\epsilon)(x)| \le |[(g-g_\epsilon)*h](x)| + |[g_\epsilon*(h-h_\epsilon)](x)| \le$$
$$\le \|g-g_\epsilon\|_q\,\|h\|_r + \|h-h_\epsilon\|_r\,\|g_\epsilon\|_q \le 2\epsilon(\|g\|_q + \|h\|_r)$$

Dunque $g_\epsilon * h_\epsilon \to_{\epsilon\to 0} g*h,$ uniformemente e siccome $g_\epsilon * h_\epsilon$ é chiaramente C_0^∞, allora $g*h$ é continua. Infine, che $g*h$ vada uniformemente a zero all'infinito segue di nuovo dal fatto che $g*h$ é limite uniforme di funzioni a supporto compatto.

Effetto regolarizzante della convoluzione. Sia $\int_{\mathbf{R}^n}|f| < \infty.$ Allora

(i) $g \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n) \Rightarrow f*g \in C^\infty(\mathbf{R}^n),$ $\quad \frac{\partial}{\partial x_j}(f*g) = f*\frac{\partial g}{\partial x_j}$

(ii) $\mathrm{supp}(f*g) \subset \mathrm{supp}\ f + \mathrm{supp}\ g$ $\quad (\mathrm{supp}\ f := \text{chiusura di } \{x:\ f(x)\neq 0\})$

Basta mostrare, usando Lebesgue, che é lecita la derivazione sotto segno di integrale.

Nuclei regolarizzanti. Sia $0 \le \varphi$ sommabile in $\mathbf{R}^n$ tale che $\int_{\mathbf{R}^n}\varphi = 1.$ Sia $\varphi_\epsilon(x) ::= \epsilon^{-n}\varphi(\frac{x}{\epsilon}).$ Allora

$$\int |\varphi_\epsilon * f - f\,|^p \to_{\epsilon\to 0} 0 \quad \forall f \in L^p(\mathbf{R}^n)$$

Segue da $\int_{\mathbf{R}^n} |\,\varphi_\epsilon * f - f|^p(x)\,dx = \int |\int [f(x)-f(x-y)](\varphi_\epsilon(y))^{\frac{1}{p}}\,(\varphi_\epsilon(y))^{\frac{1}{q}}\,dy|^p\,dx$

$$\le \int \left(\int |f(x)-f(x-y)|^p\varphi_\epsilon(y)dy\right)\left(\int |\varphi_\epsilon(y)|dy\right)dx =$$

$$\int \left(\varphi(z)\int |f(x) - f(x-\epsilon z)|^p dx\right) dz \to_{\epsilon\to 0} 0 \quad \text{(convergenza dominata)}$$

Approssimazione mediante convoluzione. Siccome $f*\varphi_\epsilon \in C^\infty(\mathbf{R}^n)$, abbiamo ottenuto che

ogni f sommabile é limite in media di funzioni C^∞
In effetti ogni f sommabile é limite in media di funzioni C_0^∞

Basta infatti prendere $f\,\chi_{B_{\frac{1}{\epsilon}}} * \varphi_\epsilon$:

$$\int |\,f\,\chi_{B_{\frac{1}{\epsilon}}} * \varphi_\epsilon - f| \le \int |(f\,\chi_{B_{\frac{1}{\epsilon}}} - f)*\varphi_\epsilon| + \int |f*\varphi_\epsilon - f| \to 0$$

perché $\int |f - f\,\chi_{B_{\frac{1}{\epsilon}}}| = \int_{|x|\ge\frac{1}{\epsilon}} |f| \to 0$ al tendere di ϵ a zero.

COMPATTEZZA IN $L^p(\mathbf{R}^N)$: IL TEOREMA DI FRECHET- KOLMOGOROV

Sia $p \geq 1$. Non é in generale vero che una successione limitata in $L^p(\mathbf{R}^N)$ ammette sottosuccessioni convergenti in L^p. Cioé, non é vero in generale che

$$f_n \in L^p(\mathbf{R}^N), \quad \sup_n \|f_n\|_{L^p} < +\infty \quad \Rightarrow \quad \exists f_{n_k} \quad \text{convergente in} \quad L^p$$

Ad esempio, se $f \in C_0^\infty(\mathbf{R}^N)$ e $f_n(x) := f_n(x + h_n)$, $|h_n| \to_n +\infty$, allora $f_n(x) \to_n 0 \quad \forall x \in \mathbf{R}^N$ ma f_n non ha estratte convergenti (necessariamente a zero) in L^p perché $\|f_n\|_p \equiv \|f\|_p$. Analogamente , $f_n(x) := \epsilon_n^{\frac{N}{p}} f(\epsilon_n x)$, $\epsilon_n \to_n 0$ ha norma L^p costante e quindi non ha estratte convergenti a $f \equiv 0$ che é il limite puntuale delle f_n.

Al fine di individuare delle condizioni che assicurino la compattezza di f_n in L^p, cominciamo con l'osservare che

$$\int |f_n - f|^p \to_n 0 \quad \Rightarrow \quad \sup_n \int |f_n|^p < +\infty \quad \text{e}$$

$$\sup_n \int |f_n(x+h) - f_n(x)|^p dx \to_{|h| \to 0} 0 \qquad\qquad \sup_n \int_{|x| \geq r} |f_n|^p \to_{r \to +\infty} 0$$

La validitá di tali proprietá per ciascuna f_n é ben nota: il fatto che tali proprietá valgano uniformemente in n é facile conseguenza della convergenza L^p delle f_n. É sotto tali condizioni che una data f_n ha una estratta convergente in L^p.

Teorema (Frechet-Kolmogorov) . Sia $\Omega \subset \mathbf{R}^N$ aperto. Siano f_n misurabili in $L^p(\mathbf{R}^N)$ e tali che

(i) $\quad \forall K \subset \Omega$ compatto $\exists c(K)$: $\qquad \sup_n \int_K |f_n|^p \leq c(K)$

(ii) $\quad \forall K \subset \Omega$ compatto $\qquad \sup_n \int_K |f_n(x+h) - f_n(x)|^p dx \to_{|h| \to 0} 0$

Allora esistono f ed f_{n_k} tali che $\int_K |f_{n_k} - f|^p \to_k 0 \quad \forall \quad \forall K \subset \Omega$ compatto . Se di piú

(iii) $\quad \forall \epsilon > 0, \quad \exists\ K_\epsilon \subset \Omega$ compatto e tale che $\qquad \sup_n \int_{\Omega \setminus K_\epsilon} |f_n|^p \leq \epsilon$

allora f_n ha una sottosuccessione convergente in $L^p(\Omega)$.

Prova. Sia, per semplicitá, $p = 1$. Nel seguito supporremo, come é lecito, che $f_n \equiv 0$ fuori di Ω. Il seguente Lemma descrive il ruolo delle ipotesi (i)-(ii).

Lemma . Sia $\varphi \in C_0^\infty(B_1),\ 0 \le \varphi \le 1,\ \int\limits_{\mathbf{R}^N} \varphi = 1,\ \ \varphi_\epsilon = \epsilon^{-N}\varphi(\frac{x}{\epsilon})$. Sia $K \subset \Omega$ compatto, $\epsilon < dist(K, \partial\Omega)$. Allora

$$(i) \quad \Rightarrow \quad \exists c = c_e : \ \sup_{x\in K} |(f_n * \varphi_\epsilon)(x)| + \sum_{j=1}^N \left[\sup_{x\in K} |\frac{\partial}{\partial x_j}(\varphi_\epsilon * f_n)(x)|\right] \le c_\epsilon \quad \forall n$$

$$(ii) \quad \Rightarrow \quad \sup_n \int\limits_K |f_n - (\varphi_\epsilon * f_n)| \to_{\epsilon\to 0} 0$$

Prova del Lemma.

Sia $K^\epsilon := \{z = x + y : \ x \in K, \ |y| \le \epsilon\}$. Da $c(K^\epsilon) := \sup\limits_n \int\limits_{K^\epsilon} |f_n| < +\infty$ segue

$$|(\varphi_\epsilon * f_n)(x)| \le \|\varphi_\epsilon\|_\infty \int\limits_{|y|\le\epsilon} |f_n(x-y)|\,dy \le c(K^\epsilon)\,\|\varphi_\epsilon\|_\infty \qquad \forall x \in K$$

$$|\frac{\partial}{\partial x_j}(\varphi * f_n)(x)| = \left|\int\limits_{\mathbf{R}^N} f_n(y)\,\frac{\partial}{\partial x_j}\varphi_\epsilon(x-y)\,dy\right| \le c(K^\epsilon)\,\|\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\|_\infty \quad \forall x \in K$$

Poi, $\sup_n \int\limits_K |f_n(x+h) - f_n(x)|\,dx \to_{|h|\to 0} 0 \quad \Rightarrow$

$$\int_K |f_n(x) - (\varphi_\epsilon * f_n)(x)| \le \int_K \left(\int_{\mathbf{R}^N} |f_n(x-y) - f_n(x)|\varphi_\epsilon(x)\,dy\right) dx =$$

$$\int_K \left(\int_{\mathbf{R}^N} |f_n(x-\epsilon z) - f_n(x)|\varphi(z)\,dz\right) dx =$$

$$= \int_{|z|\le 1} \left(\varphi(z) \int_K |f_n(x-\epsilon z) - f_n(x)|\,dx\right) dz \to_{\epsilon\to 0} 0$$

PROVA di F-K.

Sia $\Omega_h,\ h \in \mathbf{N}$ famiglia crescente di sottoinsiemi aperti limitati di Ω tali che

$$K_h := \overline{\Omega}_h \subset \Omega, \quad dist(K_h, \partial\Omega) > \frac{1}{h}, \quad \cup_h \Omega_h = \Omega$$

Proviamo che

$$\exists n_k : \quad \int\limits_{K_h} |f_{n_k} - f_{n_h}| \le \frac{1}{h} \qquad \forall k \ge h$$

Dalla seconda parte del Lemma segue che

$$\forall h,\ \exists \epsilon_h < \frac{1}{h} : \qquad \sup_n \int_{K_h} |f_n - (\varphi_h * f_n)| \leq \frac{1}{h} \qquad (\varphi_h := \varphi_{\epsilon_h})$$

Dalla prima parte del Lemma segue che, per ogni ϵ, la successione $n \to \varphi_\epsilon * f_n$ soddisfa le ipotesi del Teorema di Ascoli-Arzela su ogni compatto K in Ω tale che $dist(K, \partial\Omega) > \epsilon$. Esiste quindi una selezione di indici n_j^1 tale che $\varphi_1 * f_{n_j^1}$ converge uniformemente (e quindi in media) in K_1. Possiamo quindi supporre che

$$\int_{K_1} |\varphi_1 * f_{n_i^1} - \varphi_1 * f_{n_j^1}| \leq 1 \qquad \forall i, j$$

Per la stessa ragione, esiste una (ulteriore) selezione di indici $(n_j^2) \subset (n_j^1)$ tale che

$$\int_{K_2} |\varphi_2 * f_{n_i^2} - \varphi_2 * f_{n_j^2}| \leq \frac{1}{2} \qquad \forall i, j$$

Iterando, troviamo, al passo h una (ulteriore) selezione di indici $(n_j^h) \subset (n_j^{h-1})$ tali che

$$\int_{K_h} |\varphi_h * f_{n_i^h} - \varphi_h * f_{n_j^h}| \leq \frac{1}{h} \quad \forall i, j$$

Ma allora, indicata $n_h := n_h^h$, troviamo che

$$k \geq h \quad \Rightarrow \quad \int_{K_h} |f_{n_k} - f_{n_h}| \leq$$

$$\leq \int_{K_h} |f_{n_k} - \varphi_h * f_{n_k}| + \int_{K_h} |\varphi_h * f_{n_k} - \varphi_h * f_{n_h}| + \int_{K_h} |\varphi_h * f_{n_h} - f_{n_h}| \leq \frac{3}{h}$$

Siccome, fissato $K \subset \Omega$ compatto, $K \subset K_h$ per h grande, si ha che f_{n_k} é di Cauchy in $L^1(K)$ e quindi esiste f misurabile in Ω tale che $\int_K |f_{n_k} - f| \to_k 0$.

Per provare la seconda parte del teorema basta osservare che

$$\exists K_\epsilon : \quad \int_{\Omega \setminus K_\epsilon} |f| \leq \liminf_j \int_{\Omega \setminus K_\epsilon} |f_{n_j}| \leq \epsilon \quad \Rightarrow$$

$$\limsup_j \int_\Omega |f_{n_j} - f| \leq \limsup_j \int_{K_\epsilon} |f_{n_j} - f| + \limsup_j \int_{\Omega \setminus K_\epsilon} |f_{n_j} - f| \leq 2\,\epsilon$$

AM5: Esercizi e Problemi- 8

Problema 1. Sia $0 \le \varphi$ sommabile in $\mathbf{R}^n$ tale che $\int_{\mathbf{R}^n} \varphi = 1$. Sia $\varphi_\epsilon(x) := \epsilon^{-n}\varphi(\frac{x}{\epsilon})$. Allora

$$\int_{B_R} |\varphi_\epsilon * f - f|^p \to_{\epsilon\to 0} 0 \quad \forall f \in L^p_{loc}(\mathbf{R}^n), \quad \forall R > 0$$

ove $f \in L^p_{loc} \quad \Leftrightarrow \quad \int_{|x|\le R} |f|^p < +\infty \quad \forall R > 0$.

Problema 2. Sia f continua in $\mathbf{R}^n$, $\varphi \in C_0^\infty$. Provare che

(i) $f * \varphi(x) := \int_{\mathbf{R}^n} f(x-y)\varphi(y)dy$ é definita in tutto $\mathbf{R}^n$ ed é una funzione C^∞.

(ii) $f * \varphi_\epsilon$ converge uniformemente sui compatti ad f.

Problema 3. Sia f sommabile in $\mathbf{R}^n$. Provare che

$$\int |f(x) - \frac{1}{L^n(B_r)} \int_{B_r(x)} f(y)dy \,|\, dx \to_{r\to 0} 0$$

Problema 4 Sia $f \in C(\mathbf{R}^N)$. Provare che

$$f(x) \to_{|x|\to+\infty} 0 \quad \Leftrightarrow \quad \exists f_n \in C_0^\infty(\mathbf{R}^N) : \quad \sup_{x\in\mathbf{R}^N} |f_n(x) - f(x)| \to_{n\to+\infty} 0$$

Esercizio 1. Sia $\alpha \in [0,1)$. Sia $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}\chi_{(0,1]}$.

Provare che $f * f$ é continua sse $\alpha < \frac{1}{2}$.

Esercizio 2. Sia f sommabile in $\mathbf{R}^n$. Posto $f_n = f\, \chi_{\{|f(x)|\le n\}}$, provare che

$$\int |g| < +\infty \quad \Rightarrow \quad \int |f_n * g - f * g| \to_n 0$$

Esercizio 3. Stabilire se é vero che

$$f \in C(\mathbf{R}^n),\ \varphi \in C_0^\infty \quad \Rightarrow \quad x \to \int_{\mathbf{R}^n} f(x-y)\, g(y)dy \qquad \text{é sommabile}$$

AM5: Esercizi e Problemi- 8

CENNI DI SOLUZIONE

Problema 2. Sia *supp* $\varphi \subset B_1$, $|x| \leq R$. Allora

$$|(\varphi_\epsilon * f)(x) - f(x)| \leq \int |f(x) - f(x-y)|\varphi_\epsilon(y)\, dy =$$

$$\int \left(\varphi(z) \int |f(x) - f(x-\epsilon z)|dx\right) dz \leq$$

$$\leq \sup_{x,y \in B_{R+1},\ |x-y|\leq\epsilon} |f(x) - f(y)| \to_{\epsilon\to 0} 0$$

per la uniforme continuitá di f in B_{R+1}.

Problema 3. $\int |f(x) - \frac{1}{volB_r}\int_{B_r(x)} f(y)dy|dx \mid \leq$

$$\leq \frac{1}{r^N volB_1} \int \left(\int |f(x) - f(y)|\chi_{B_r(x)}(y)\, dy\right) dx =$$

$$\frac{1}{r^N volB_1} \int \left(\int |\, f(x) - f(x-z))|\, \chi_{B_1}(\frac{z}{r})\, dz\right) dx =$$

$$= \frac{1}{r^N volB_1} \int \left(\int |f(x) - f(x - r\xi)|\, \chi_{B_1}(\xi)\, r^N\, d\xi\right) dx =$$

$$= \frac{1}{volB_1} \int \left(\chi_{B_1}(\xi) \int |\, f(x) - f(x-r\xi)\,|dx\right) d\xi \to_{r\to 0} 0$$

perché $\int |f(x) - f(x-r\xi)|dx \to_{r\to 0} 0$ e c ' é equidominatezza:

$$\chi_{B_1}(\xi) \int |f(x) - f(x-r\xi)|dx \leq 2\|f\|_{L^1}\ \chi_{B_1}(\xi)$$

Problema 4.

$f \in C(\mathbf{R}^N)$, $f(x) \to_{|x|\to+\infty} 0$ $\Rightarrow$ f é uniformemente continua su tutto $\mathbf{R}^N$

e quindi, esattamente come nel Problema 2 si vede che ora

$$\sup_{\mathbf{R}^N} |(\varphi_\epsilon * f)(x)| \to_{\epsilon\to 0} 0$$

Sia ora $\chi_n := \chi_{|x|\leq n}$. É

$\varphi_\epsilon * (f\chi_n) \in C_0^\infty(\mathbf{R}^N)$ e $|(\varphi_{\frac{1}{n}} * (f(\chi_n - 1))(x)| \leq \sup_{|y|\geq n} |f(y)| \leq \epsilon$ se $n \geq n_\epsilon$

e quindi, per $n \geq n_\epsilon$, si ha

$$|(\varphi_{\frac{1}{n}} * (f\chi_n))(x) - f(x)| \leq |(\varphi_{\frac{1}{n}} * (f(\chi_n - 1))(x)| + |(\varphi_{\frac{1}{n}} * f)(x) - f(x)| \, leq\epsilon \quad \forall x \in \mathbf{R}^N$$

Il viceversa é ovvio:

$$\sup_{\mathbf{R}^N} |f(x) - f_{n_\epsilon}(x)| \leq \epsilon, \quad supp \quad f_{n_\epsilon} \subset B_{R_\epsilon}, \quad |x| \geq R_\epsilon \quad \Rightarrow$$

$$|f(x)| \leq |f(x) - f_{n_\epsilon}(x)| + |f_{n_\epsilon}(x)| \leq \epsilon$$

Esercizio 1. Se $\alpha < \frac{1}{2}$ allora $f \in L^2$ e quindi $f * f$ é continua:

$$|(f * f)(x + h) - (f * f)(x)| \leq \int |f(x + h - y) - f(x - y)| \, |f(y)| \, dy \ \leq$$

$$\leq \ \|f\|_2 \left(\int |f(x + h - y) - f(x - y)|^2 dy \right)^{\frac{1}{2}} \rightarrow_{h \to 0} 0$$

Per discutere il caso $\alpha \geq \frac{1}{2}$, calcoliamo esplicitamente $f * f$.

$$x \leq 0 \quad \Rightarrow \quad \chi_{(0,1]}(y) \, \chi_{(0,1]}(x - y) = \chi_{(0,1] \cap [x-1, x)}(y) \equiv 0 \quad \Rightarrow \quad (f * f)(x) = 0$$

$$0 < x \leq 1 \quad \Rightarrow \quad (f * f)(x) = \int_0^x \frac{dy}{(x - y)^\alpha y^\alpha} = \frac{1}{x^{2\alpha}} \int_0^x \frac{dy}{(1 - \frac{y}{x})^\alpha \, (\frac{y}{x})^\alpha} =$$

$$= \ \frac{1}{x^{2\alpha - 1}} \int_0^1 \frac{dt}{(1 - t)^\alpha \, t^\alpha} \rightarrow_{x \to 0^+} +\infty \quad \text{se} \quad \alpha > \frac{1}{2}$$

mentre

$$0 < x \leq 1 \quad \Rightarrow \quad (f * f)(x) = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t(1 - t)}} \quad \text{se} \quad \alpha = \frac{1}{2}$$

Dunque $f * f$ é discontinua in $x = 0$ se $\alpha \geq \frac{1}{2}$. Questo é in effetti l'unico punto di discontinuitá:

$$x \geq 1 \quad \Rightarrow \quad (f * f)(x) = \frac{1}{x^{2\alpha - 1}} \int_{1 - \frac{1}{x}}^{1} \frac{dt}{(1 - t)^\alpha \, t^\alpha}$$

che é evidentemente continua.

AM5 2008: Tracce delle lezioni- 9

CONVOLUZIONE CON NUCLEI SINGOLARI e DISEGUAGLIANZA HARDY-LITTLEWOOD-SOBOLEV

Sia $0 < \lambda < N$. Sia

$$G_\lambda(x) := \frac{1}{|x|^\lambda}, \qquad x \in \mathbf{R}^N$$

G_λ non appartiene ad alcun $L^p(\mathbf{R}^N)$. Tuttavia G_λ ha proprietá di sommabilita locale. Ad esempio $\int\limits_{|x|\le R} \frac{dx}{|x|^\lambda} = \frac{N\, vol(B_1)}{N-\lambda} R^{N-\lambda}$. Ció comporta, in particolare, che se $\varphi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^N)$, allora

$$(\varphi * G_\lambda)(x) := \int\limits_{\mathbf{R}^N} \frac{\varphi(y)}{|x-y|^\lambda}\, dy = \int\limits_{\mathbf{R}^N} \frac{\varphi(x-y)}{|y|^\lambda}\, dy$$

é definita per ogni $x \in \mathbf{R}^N$ ed é infatti una funzione $C^\infty(\mathbf{R}^N)$. Ad esempio, se $\Delta\varphi(x) := \sum\limits_{j=1}^{N} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_j^2}$, risulta $\Delta(\varphi * G_\lambda) = (\Delta\varphi) * G_\lambda$.

La convoluzione con nuclei del tipo G_λ dá origine a importanti formule di rappresentazione. Cominciamo con una formula relativa all'equazione di Poisson. Sia

$$N \ge 3, \qquad c_N := N(N-2) \int\limits_{\mathbf{R}^N} \frac{dy}{(1+|y|^2)^{\frac{N+2}{2}}}, \qquad \mathcal{N} := \frac{G_{N-2}}{c_N}$$

Proposizione. Per ogni $\varphi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^N)$ si ha

$$-\Delta(\varphi * \mathcal{N}) = \varphi \qquad \text{in } \mathbf{R}^N$$

Tale formula si basa sulla **formula di integrazione per parti**

$$\int\limits_{\mathbf{R}^N} \frac{\partial u}{\partial x_j}\, v = -\int\limits_{\mathbf{R}^N} u\, \frac{\partial v}{\partial x_j} \qquad \forall u \in C^\infty, \quad \forall v \in C_0^\infty(\mathbf{R}^N)$$

che é a sua volta conseguenza del Teorema Fondamentale del Calcolo. Ad esempio,

$$\int\limits_{\mathbf{R}^N} \frac{\partial(u\,v)}{\partial x_1} = \int\limits_{\mathbf{R}^{N-1}} \left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial(u\,v)}{\partial x_1} \right) dx_2 \dots dx_N = 0$$

Prova della Proposizione. É $\Delta\,(\varphi * G_{N-2})(x) = \int\limits_{\mathbf{R}^N} \frac{(\Delta\,\varphi)(x-y)}{|y|^{N-2}}\,dy$

$$= \lim_{\epsilon\to 0} \int\limits_{\mathbf{R}^N} \frac{\Delta_y[\varphi(x-y)]}{(\epsilon^2+|y|^2)^{\frac{N-2}{2}}}\,dy \;=\; \lim_{\epsilon\to 0} \int\limits_{\mathbf{R}^N} \varphi(x-y)\,\Delta_y\,\frac{1}{(\epsilon^2+|y|^2)^{\frac{N-2}{2}}}\,dy$$

$$= \lim_{\epsilon\to 0} \int\limits_{\mathbf{R}^N} \varphi(x-y) \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial}{\partial y_j}[-(N-2)\,\frac{y_j}{(\epsilon^2+|y|^2)^{\frac{N}{2}}}\;]\,dy \;=$$

$$\lim_{\epsilon\to 0} \int\limits_{\mathbf{R}^N} \varphi(x-y)\,\sum_{j=1}^{N}[N(N-2)\frac{y_j^2}{(\epsilon^2+|y|^2)^{\frac{N+2}{2}}} \;-(N-2)\frac{1}{(\epsilon^2+|y|^2)^{\frac{N}{2}}}\,]\,dy \;=$$

$$\lim_{\epsilon\to 0} \int\limits_{\mathbf{R}^N} \varphi(x-y)\;\frac{-N(N-2)\epsilon^2}{(\epsilon^2+|y|^2)^{\frac{N+2}{2}}}\,dy \;=\; \lim_{\epsilon\to 0} \int\limits_{\mathbf{R}^N} \;\varphi(x-\epsilon\xi)\;\frac{-N(N-2)}{(1+|\xi|^2)^{\frac{N+2}{2}}}\,d\xi \;=$$

$$=\; -\varphi(x)N(N-2)\int\limits_{\mathbf{R}^N} \frac{d\xi}{(1+|\xi|^2)^{\frac{N+2}{2}}}$$

Corollario. Sia $N \geq 3$. Allora, per ogni $\varphi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^N)$ si ha

$$\varphi(x) = -\,(\Delta\varphi) * \mathcal{N} = -\,\frac{1}{c_N}\int\limits_{\mathbf{R}^N} \frac{(\Delta\,\varphi)(x-y)}{|y|^{N-2}}\,dy$$

Un'altra formula di rappresentazione. Sia $\varphi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^N)$, $N \geq 3$. Allora

$$\varphi(x) \;=\; \frac{N-2}{c_N}\int\limits_{\mathbf{R}^N} \frac{<(\nabla\varphi)(x-y)\;,\;y>}{|y|^N}\,dy \qquad (*)$$

Prova . 1) Dal Corollario: $\varphi(x) = -\frac{1}{c_N}\sum_j \int\limits_{\mathbf{R}^N} \frac{\partial^2\varphi}{\partial y_j^2}(x-y)\frac{1}{|y|^{N-2}}\,dy =$

$$\frac{2-N}{c_N}\sum_j \int\limits_{\mathbf{R}^N} \frac{\partial}{\partial y_j}\varphi(x-y)\frac{y_j}{|y|^N}dy = \frac{N-2}{c_N}\int\limits_{\mathbf{R}^N} \;<(\nabla\varphi)(x-y),\frac{y}{|y|^N}>dy$$

Giustificazione della integrazione per parti: $\int\limits_{\mathbf{R}^N} \frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{1}{|x|^{N-2}}dx =$

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int\limits_{\mathbf{R}^N} \frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{1}{(\epsilon^2+|x|^2)^{\frac{N-2}{2}}}dx = -(2-N)\lim_{\epsilon\to 0}\int\limits_{\mathbf{R}^N} u\frac{x_j}{(\epsilon^2+|x|^2)^{\frac{N}{2}}}dx = (N-2)\int\limits_{\mathbf{R}^N} u\frac{x_j}{|x|^N}dx$$

2) Determinazione diretta :

$$\int\limits_{\mathbf{R}^N} \frac{<(\nabla\varphi)(x-y)\;,\;y>}{|y|^N}\;dy \;\;=\lim_{\epsilon\to 0}\sum_{j=1}^{N}\int\limits_{\mathbf{R}^N} \;-\frac{\partial}{\partial y_j}\,[\varphi(x-y)]\quad\frac{y_j}{(\epsilon^2+|y|^2)^{\frac{N}{2}}}\,dy \;=$$

$$\lim_{\epsilon\to 0}\sum_{j=1}^{N}\int\limits_{\mathbf{R}^N} \varphi(x-y)\,\frac{\partial}{\partial y_j}\,\frac{y_j}{(\epsilon^2+|y|^2)^{\frac{N}{2}}}\,dy \;=\; N\lim_{\epsilon\to 0}\epsilon^2\int\limits_{\mathbf{R}^N}\left[\frac{\varphi(x-y)}{(\epsilon^2+|y|^2)^{\frac{N+2}{2}}}\right]dy \;=$$

$$=\; N\lim_{\epsilon\to 0}\int\limits_{\mathbf{R}^N}\left[\frac{\varphi(x-\epsilon z))}{(1+|z|^2)^{\frac{N+2}{2}}}\right]dz \;=\; N\varphi(x)\int\limits_{\mathbf{R}^N}\frac{dz}{(1+|z|^2)^{\frac{N+2}{2}}} = \frac{c_N}{N-2}\varphi(x)$$

3). Un calcolo alternativo:

$$\varphi(x) = \frac{1}{\omega_N}\int\limits_{\mathbf{R}^N}\frac{<(\nabla\varphi)(x-y)\,,\,y>}{|y|^N}\,dy \qquad (**)$$

ove ω_N indica l'area della sfera unitaria in $\mathbf{R}^N$. Tale calcolo si basa sul Teorema della divergenza: se Ω é aperto limitato e a frontiera liscia e $X\in C^1(\overline{\Omega},\mathbf{R}^N)$, allora

$$\int\limits_{\Omega} div\;X\,dy = \int\limits_{\partial\Omega} <X,\nu>\,d\sigma$$

ove $\nu(y)$ indica la normale esterna ad Ω in $y\in\partial\Omega$. Nel nostro caso prenderemo

$$X(y) := \varphi(x-y)\frac{y}{|y|^N}$$

per cui

$$div\;X(y) = <\nabla_y\varphi(x-y),\frac{y}{|y|^N}> \;+\varphi\;div\;\frac{y}{|y|^N} \;=\; -<(\nabla\varphi)(x-y),\frac{y}{|y|^N}>$$

perché $div\;\frac{y}{|y|^N} = div\;\nabla\left(-\frac{1}{(N-2)|y|^{N-2}}\right) = \Delta\left(-\frac{1}{(N-2)|y|^{N-2}}\right) = 0 \quad \forall y\neq 0$. Inoltre, se $\varphi\equiv 0$ fuori della palla B_r, prenderemo $\Omega := \{\epsilon<|y|<r\}$, risultando quindi $\nu(y) = -\frac{y}{|y|}$ se $|y|=\epsilon$. Allora

$$\int\limits_{\mathbf{R}^N}\frac{<(\nabla\varphi)(x-y)\,,\,y>}{|y|^N}\,dy = \lim_{\epsilon\to 0}\int\limits_{|y|\geq\epsilon}\frac{(\nabla\varphi)(x-y)\,,\,y>}{|y|^N}\,dy =$$

$$=\lim_{\epsilon\to 0}\int\limits_{|y|=\epsilon}\frac{\varphi(x-y)}{|y|^{N-1}}\,d\sigma = \lim_{\epsilon\to 0}\int\limits_{|y|=\epsilon}\frac{\varphi(x-y)}{\epsilon^{N-1}}\,d\sigma = \omega_N\varphi(x)$$

NOTA. Da $(*)$ e $(**)$ si deduce che $\omega_N = \frac{c_N}{N-2} = N\int\limits_{\mathbf{R}^N}\frac{dz}{(1+|z|^2)^{\frac{N+2}{2}}}$ e quindi $vol(B_1) = \frac{\omega_N}{N} = \int\limits_{\mathbf{R}^N}\frac{dz}{(1+|z|^2)^{\frac{N+2}{2}}}$.

La Proposizione e la formula $(*)$ indicano che é utile conoscere le proprietá di sommabilitá di $(\varphi * G_\lambda)$. Tali proprietá sono descritte dalla diseguaglianza

H-L-S

Se $\quad \lambda \in (0,N), \quad p,r > 1, \quad \frac{1}{p}+\frac{\lambda}{N}+\frac{1}{r}=2$, esiste $\quad c=c(\lambda,N,p)$:

$$|\int_{\mathbf{R}^N\times\mathbf{R}^N} \frac{h(x)\ f(y)}{|x-y|^\lambda}\,dxdy| \quad \le \quad c \quad \|h\|_r \ \ \|f\|_p \qquad \forall f\in L^p(\mathbf{R}^N), \quad h\in L^r(\mathbf{R}^N)$$

In particolare, posto $\quad \frac{1}{s} = \frac{\lambda}{N}+\frac{1}{p}-1$, (ovvero s é l'esponente coniugato di r), allora

$$\exists c>0: \qquad \|G_\lambda \ * \ f\|_s \ \le \ c\,\|f\|_p \qquad \forall f\in L^p(\mathbf{R}^N)$$

In altre parole, $G_\lambda * f$ é ben definita per ogni funzione $L^p, p>1$ e $Lf := G_\lambda * f$ é infatti lineare e continuo da L^p in L^s, $\frac{1}{s}=\frac{\lambda}{N}+\frac{1}{p}-1$.

NOTA La relazione sopra indicata tra i parametri λ,p,r,N é necessaria perché una siffatta diseguaglianza possa valere, e ció per il suo carattere di invarianza rispetto ai cambi di scala. La dimostrazione di H-L-S é proposta in Appendice. Indichiamo di seguito **DUE CASI IMPORTANTI**.

$$\lambda = N-2, \qquad \frac{N}{2} > \ p \ > \ 1 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{1}{s}=\frac{N-2p}{Np} \qquad (=\frac{N-2}{2N} \qquad \text{se} \qquad p=\frac{2N}{N+2}) \qquad \Rightarrow$$

$$\|G_{N-2} * f\|_{\frac{Np}{N-2p}} \quad \le \quad c(N) \ \ \|f\|_p \qquad \forall f\in L^p(\mathbf{R}^N)$$

$$\lambda = N-1, \qquad N > \ p \ > \ 1, \qquad \Rightarrow \qquad \frac{1}{s}=\frac{N-p}{Np} \qquad \Rightarrow$$

$$\|G_{N-1} * f\|_{\frac{Np}{N-p}} \quad \le \quad c(N,p) \ \ \|f\|_p \qquad \forall f\in L^p(\mathbf{R}^N)$$

La diseguaglianza $\|G_{N-2} * f\|_{\frac{Np}{N-2p}} \ \le \ c(N)\,\|f\|_p \quad \forall f\in L^p(\mathbf{R}^N)$ dice che l'operatore lineare $f \to f*\mathcal{N}$ che 'risolve' l'equazione di Poisson con dato $f\in C_0^\infty$ si estende in modo continuo da $L^p(\mathbf{R}^N), p\in(1,\frac{N}{2})$ a $L^{\frac{Np}{N-p}}$:

$f*\mathcal{N}$ é, in senso 'debole' , soluzione dell'equazione $-\Delta u = f$ in $\mathbf{R}^N$

Piú precisamente, se $\varphi_n\in C_0^\infty(\mathbf{R}^N)$, $\varphi_n \to_n f$ in L^p e quindi $\varphi_n * \mathcal{N} \to_n f*\mathcal{N}$ in $L^{\frac{Np}{N-p}}$, da $-\Delta(\varphi_n*\mathcal{N})=\varphi_n$, segue, integrando per parti,

$$-\int_{\mathbf{R}^N} (\varphi_n*\mathcal{N})\,\Delta\varphi = \int_{\mathbf{R}^N} \varphi_n\varphi \qquad \forall\varphi\in C_0^\infty$$

e quindi, passando al limite

$$-\int_{\mathbf{R}^N} (f*\mathcal{N})\,\Delta\varphi = \int_{\mathbf{R}^N} f\,\varphi \qquad \forall\varphi\in C_0^\infty$$

La diseguaglianza $\|G_{N-1} * f\|_{\frac{Np}{N-p}} \le c(N,p)\,\|f\|_p \quad \forall f \in L^p(\mathbf{R}^N)$ dá una semplice dimostrazione di una fondamentale diseguaglianza:

LA DISEGUAGLIANZA DI SOBOLEV

$$\forall p \in (1,N), \exists c = c(N,p) : \quad \left(\int_{\mathbf{R}^N} |u|^{\frac{Np}{N-p}} \right)^{\frac{N-p}{N}} \le c \int_{\mathbf{R}^N} |\nabla u|^p \qquad \forall u \in C_0^\infty(\mathbf{R}^N)$$

Prova della diseguaglianza di Sobolev. $\qquad u \in C_0^\infty(\mathbf{R}^N) \;\Rightarrow$

$$|u(x)| \le c \int_{\mathbf{R}^N} \frac{|\nabla u(y)|}{|x-y|^{N-1}}\, dy = c\, (|\nabla u| * G_{N-1})(x) \quad \forall x \in \mathbf{R}^N \;\Rightarrow$$

$$\|u\|_{\frac{Np}{N-p}} \le c\, \|G_{N-1} * |\nabla u|\|_{\frac{Np}{N-p}} \le c\, \|\nabla u\|_p$$

NOTA. Sobolev vale anche per ogni $N \ge 2$ e $p = 1$. Si puó in effetti dedurre facilmente dal caso $p = 1$, che a sua volta segue dalla diseguaglianza elementare

$$|u(x_1,\dots,x_N)|^N \le \int_{-\infty}^{+\infty} |\tfrac{\partial u}{\partial x_1}(t,x_2,\dots,x_N)dt| \times \dots \times \int_{-\infty}^{+\infty} |\tfrac{\partial u}{\partial x_N}(x_1,x_2,\dots,t)dt|$$

che implica $\left(\int_{\mathbf{R}^N} |u(x)|^{\frac{N}{N-1}} dx \right)^{\frac{N-1}{N}} \le$

$$\left[\int_{\mathbf{R}^N} \left[\left(\int_{-\infty}^{+\infty} |\tfrac{\partial u}{\partial x_1}(t,x_2,\dots,x_N)dt| \right)^{\frac{1}{N-1}} \times \dots \times \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |\tfrac{\partial u}{\partial x_N}(x_1,x_2,\dots,t)dt| \right)^{\frac{1}{N-1}} \right] dx \right]^{\frac{N-1}{N}}$$

Sfruttando la speciale forma dell'integrando a secondo membro, si puó provare, sempicemente iterando Holder, che

$$\left[\int_{\mathbf{R}^N} \left[\left(\int_{-\infty}^{+\infty} |\tfrac{\partial u}{\partial x_1}(t,x_2,\dots,x_N)dt| \right)^{\frac{1}{N-1}} \times \dots \times \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |\tfrac{\partial u}{\partial x_N}(x_1,x_2,\dots,t)dt| \right)^{\frac{1}{N-1}} \right] dx \right]^{\frac{N-1}{N}}$$

$$\le \left(\int_{\mathbf{R}^{N-1}} \int_{-\infty}^{+\infty} |\tfrac{\partial u}{\partial x_1}(t,x_2,\dots,x_N)dt| dx_2 \dots dx_N \right)^{\frac{1}{N}} \times \dots \times$$

$$\left(\int_{\mathbf{R}^{N-1}} \int_{-\infty}^{+\infty} |\tfrac{\partial u}{\partial x_N}(x_1,x_2,\dots,t)dt| dx_1 \dots dx_{N-1} \right)^{\frac{1}{N}} = \|\tfrac{\partial u}{\partial x_1}\|_1^{\frac{1}{N}} \times \dots \times \|\tfrac{\partial u}{\partial x_N}\|_1^{\frac{1}{N}} \le \textstyle\sum_{j=1}^N \|\tfrac{\partial u}{\partial x_j}\|_1 .$$

Diseguaglianza di POINCARÉ. Sia $1 < p < N$, $\Omega \subset \mathbf{R}^N$ aperto limitato.

Allora $\quad \exists\, c = c(\Omega) > 0 : \quad \int\limits_{\Omega} |\nabla u|^p \ \geq \ c \int\limits_{\Omega} |u|^p \quad \forall u \in C_0^\infty(\Omega)$

Infatti, da $\frac{p}{N} + \frac{N-p}{N} = 1$, usando Holder e quindi Sobolev, segue

$$\int\limits_{\mathbf{R}^N} |u|^p \ \leq \left(\int\limits_{\mathbf{R}^N} |u|^{\frac{Np}{N-p}} \right)^{\frac{N-p}{N}} vol(\Omega)^{\frac{p}{N}} \ \leq \ M(\Omega) \int\limits_{\mathbf{R}^N} |\nabla u|^p \quad \forall u \in C_0^\infty(\Omega)$$

Poincaré non vale in $\mathbf{R}^N$: $\quad \inf\limits_{u \in C_0^\infty(\mathbf{R}^N),\, u \neq 0} \frac{\int\limits_{\mathbf{R}^N} |\nabla u|^p}{\int\limits_{\mathbf{R}^N} |u|^p} = 0$

Se $\quad u_\epsilon(x) := u(\epsilon x)$, é $\int\limits_{\mathbf{R}^N} |u_\epsilon|^p = \epsilon^{-N} \int\limits_{\mathbf{R}^N} |u|^p$, $\int\limits_{\mathbf{R}^N} |\nabla u_\epsilon|^p = \epsilon^{p-N} \int\limits_{\mathbf{R}^N} |\nabla u|^p$

e quindi $\quad \frac{\int\limits_{\mathbf{R}^N} |\nabla_\epsilon u|^p}{\int\limits_{\mathbf{R}^N} |u_\epsilon|^p} \ = \ \epsilon^p \ \frac{\int\limits_{\mathbf{R}^N} |\nabla u|^p}{\int\limits_{\mathbf{R}^N} |u|^p} \to_\epsilon 0 \qquad$ Allo stesso modo

si vede che $\quad \lambda_1(\Omega) := \inf\limits_{u \in C_0^\infty(\Omega),\, u \neq 0} \frac{\int\limits_{\mathbf{R}^N} |\nabla u|^2}{\int\limits_{\mathbf{R}^N} |u|^2} \ < \ \frac{\int\limits_{\mathbf{R}^N} |\nabla u|^2}{\int\limits_{\mathbf{R}^N} |u|^2} \qquad \forall u \in C_0^\infty(\Omega)$

[$l'\inf$ non é realizzato in $C_0^\infty(\Omega)$: $\quad \forall u \in C_0^\infty(\Omega) \quad \exists \epsilon < 1 : \quad u_\epsilon \in C_0^\infty(\Omega)$]

Diseguaglianze di MORREY. Sia $p > N$.

(i) $\forall\, R > 0 \ \exists\ c = c(N, p, R) \ : \quad \|u\|_\infty \ \leq \ c \left(\int\limits_{\mathbf{R}^N} |\nabla u|^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad \forall u \in C_0^\infty(B_R)$

(ii) $\exists c = c(p, N) : \quad |u(x) - u(y)| \ \leq c|x-y|^{\frac{p-N}{p}} \left(\int\limits_{\mathbf{R}^N} |\nabla u|^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad \forall u \in C_0^\infty(\mathbf{R}^N)$

(i) $u \in C_0^\infty(B_R)$, $\ x \in B_R \ \Rightarrow \ |u(x)| \ \leq \ c \int\limits_{\mathbf{R}^N} \frac{|\nabla u(y)|}{|x-y|^{N-1}} \ dy \ \leq$

$$c \left(\int\limits_{\mathbf{R}^N} |\nabla u|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int\limits_{B_R} \frac{1}{|x-y|^{q(N-1)}} \, dy \right)^{\frac{1}{q}} \ \leq \ c \left(\int\limits_{\mathbf{R}^N} |\nabla u|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int\limits_{B_{2R}} \frac{dz}{|z|^{q(N-1)}} \right)^{\frac{1}{q}}$$

perché $p > N \ \Rightarrow \ q(N-1) \ < \ N$.

(ii) Sia $Q_r := \{x : \ |x_i| \le r \ \forall i\}$ (cubo di lato $2r$ centrato nell'origine). Fissato $\overline{x}$, sia $\overline{u} = \frac{1}{2^N r^N} \int\limits_{Q_r+\overline{x}} u$ la media di u su $Q := Q_r + \overline{x}$. Per ogni $x \in Q$ risulta

$$|\overline{u} - u(x)| = |\frac{1}{(2r)^N} \int\limits_Q [u(y) - u(x)]\, dy| \le \int\limits_Q \left[\frac{|y-x|}{(2r)^N} \int_0^1 |\nabla u(ty + (1-t)x)|\, dt \right] dy$$

$$\le \frac{\sqrt{N}}{(2r)^{N-1}} \int\limits_0^1 \left(\int\limits_{(1-t)x+tQ} \frac{|\nabla u(z)|}{t^N}\, dz \right) dt \le \frac{\sqrt{N}}{(2r)^{N-1}} \left(\int\limits_Q |\nabla u|^p \right)^{\frac{1}{p}} \int_0^1 vol(tQ)^{1-\frac{1}{p}} \frac{dt}{t^N} =$$

$$\sqrt{N}\, (2r)^{1-\frac{N}{p}} \left(\int\limits_{Q_{2r}+\overline{x}} |\nabla u|^p \right)^{\frac{1}{p}} \int_0^1 t^{-\frac{N}{p}}\, dt \ = \ c(N,p)\, r^{1-\frac{N}{p}} \left(\int\limits_{Q_{2r}+\overline{x}} |\nabla u|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

Dunque, fissati x, y e posto $r \ = \ |x-y|$, $\overline{x} = \frac{x+y}{2}$, per cui $x, y \in Q_r + \overline{x}$, si ha

$$|u(x) - u(y)| \le 2c(N,p)\, r^{1-\frac{N}{p}} \left(\int\limits_{Q_{2r}+\overline{x}} |\nabla u|^p \right)^{\frac{1}{p}} \ = \ 2c(N,p)|x-y|^{1-\frac{N}{p}} \left(\int\limits_{\mathbf{R}^N} |\nabla u|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

Morrey (i) non vale in $\mathbf{R}^N$. Se $u_\epsilon(x) := u(\epsilon x)$, é

$$\int\limits_{\mathbf{R}^N} |\nabla u_\epsilon|^p = \epsilon^{p-N} \int\limits_{\mathbf{R}^N} |\nabla u|^p \qquad \text{mentre} \qquad \|u_\epsilon\|_\infty = \|u\|_\infty$$

Il Teorema di compattezza di RELLICH.

Sia $u_n \in C_0^\infty(B_R)$, con $\sup_n \left(\int\limits_{\mathbf{R}^N} |\nabla u_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} < +\infty$. Allora

(i) se $< p < N$, u_n ha una sottosuccessione convergente in $L^r(B_R)\ \forall r < \frac{Np}{N-p}$.

(ii) se $p \ = \ N$, u_n ha una sottosuccessione convergente in $L^r(B_R)\ \ \forall r$.

(iii) se $p \ > \ N$, u_n ha una sottosuccessione uniformemente convergente in B_R

Prova. (i) Sia $1 \le r < \frac{Np}{N-p}$. Da Holder e quindi Sobolev segue che

$$\sup_n \left(\int\limits_{B_R} |u_n|^r \right)^{\frac{1}{r}} \le c(R) \sup_n \left(\int\limits_{\mathbf{R}^N} |\nabla u_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} < +\infty$$

Poi, la diseguaglianza di interpolazione con $\alpha \in (0,1],\ \alpha + (1-\alpha)\frac{N-p}{Np} = \frac{1}{r}$ dá

$$\left(\int_{\mathbf{R}^N} |u_n(x+h) - u_n(x)|^r \, dx \right)^{\frac{1}{r}} \le$$

$$\left(\int_{\mathbf{R}^N} |u_n(x+h) - u_n(x)| \right)^{\alpha} \left(\int_{\mathbf{R}^N} |u_n(x+h) - u_n(x)|^{\frac{Np}{N-p}} \right)^{\frac{(1-\alpha)(N-p)}{Np}}$$

Il secondo fattore, grazie a Sobolev, resta, nelle nostre ipotesi, limitato e

$$\int_{\mathbf{R}^N} |u_n(x+h) - u_n(x)| \, dx \le \int_{\mathbf{R}^N} \left(\int_0^1 |<\nabla u_n(x+th), h>| dt \right) \, dx$$

$$\le vol(B_{2R})^{1-\frac{1}{p}} \, |h| \int_0^1 \left(\int_{\mathbf{R}^N} |\nabla u_n(x+th)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} dt \le c|h| \sup_n \left(\int_{\mathbf{R}^N} |\nabla u_n(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

La compattezza di u_n in $L^r(\mathbf{R}^N)$ segue quindi da Frechet-Kolmogoroff.

(ii) In tal caso $\sup_n \left(\int_{\mathbf{R}^N} |\nabla u_n|^r \right)^{\frac{1}{r}} < +\infty \quad \forall r$, e quindi, come in (i), otteniamo la compattezza di u_n in ogni L^r.

(iii) La (i) nel Teorema di Morrey dice $\sup_n \|u_n\|_\infty < +\infty$ mentre la (ii) assicura la equicontinuitá delle u_n. La conclusione segue quindi dal Teorema di Ascoli-Arzelá.

Nota. Rellich non vale in tutto $\mathbf{R}^N$ né fino all'esponente limite $p^* := \frac{Np}{N-p}$.

(i) Se $f \in C_0^\infty(\mathbf{R}^N)$, $f \ne 0$, $h \in \mathbf{R}^N, h \ne 0$, $f_n(x) := f(x+nh)$, allora $\|\nabla f_n\|_2 \equiv \|\nabla f\|_2$, ma f_n non ha estratte convergenti in alcun L^p

(i) Se $f \in C_0^\infty(B_1)$, $f \ne 0$, $\epsilon_n \to_n 0$, $f_n(x) := \epsilon_n^{\frac{N-2}{2}} f(\frac{x}{\epsilon_n})$ allora

$$\|\nabla f_n\|_2 \equiv \|\nabla f\|_2, \quad \|f_n\|_{\frac{2N}{N-2}} \equiv \|f_n\|_{\frac{2N}{N-2}}$$

e quindi f_n non ha estratte convergenti in $L^{\frac{2N}{N-2}}$ (mentre converge a zero in L^p per $1 \le p < \frac{2N}{N-2}$).

APPENDICE: la dimostrazione di H-L-S.

Data $f \geq 0$ misurabile in $\mathbf{R}^N$, sia

$$\chi_f := \chi_{\Gamma_f}, \quad \Gamma_f := \{(x,t) \in \mathbf{R}^N \times [0,+\infty] : \quad 0 \leq t < f(x)\}$$

Chiaramente Γ_f e quindi χ_f sono misurabili e

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \chi_f(x,t)dt \quad \forall x \in \mathbf{R}^N, \qquad \int_{\mathbf{R}^N} f = \int_0^{+\infty} |(f>t)|dt$$

ove abbiamo indicato con $|(f>t)|$ la misura dell'insieme $(f>t) := \{x \in \mathbf{R}^N : f(x) > t\}$ (la seconda uguaglianza deriva da Fubini). Analogamente

$$f^p(x) = p\int_0^{f^p(x)} s^{p-1}ds = p\int_0^{+\infty} \chi_f(x,s)s^{p-1}ds \ , \qquad \int_{\mathbf{R}^N} f^p = p\int_0^{+\infty} |(f>s)|s^{p-1}ds$$

Infine, effettuando il cambio di variabile $t = \frac{1}{\tau^\lambda}$, vediamo che

$$\frac{1}{|x|^\lambda} = \int_0^{\frac{1}{|x|^\lambda}} dt = \lambda\int_{|x|}^{+\infty} \tau^{-\lambda-1}ds = \lambda\int_0^{+\infty} \chi_{\{|x|<\tau\}}\tau^{-\lambda-1}d\tau \quad \forall x \in \mathbf{R}^N$$

Prova di (HLS). Dividendo per $\|f\|_p \ \|h\|_r$, (HLS) si riscrive

$$c(N,\lambda,p) \ := \ \sup\{\int_{\mathbf{R}^N\times\mathbf{R}^N} \frac{h(x) \ f(y)}{|x-y|^\lambda} \, dx \, dy : \quad f,h \geq 0, \|f\|_p = 1 = \|h\|_r\} < +\infty$$

Si tratta cioé di provare che esiste $c = c(N,\lambda,p) > 0$ tale che

$$p\int_0^{+\infty} |(f>t)|t^{p-1}ds = \int_{\mathbf{R}^N} f^p = 1 = \int_{\mathbf{R}^N} h^r = r\int_0^{+\infty} |(h>s)|s^{r-1}ds \quad \Rightarrow$$

$$\int_{\mathbf{R}^N\times\mathbf{R}^N} \left[\left(\int_0^{+\infty} \chi_f(y,t)dt\right)\left(\int_0^{+\infty} \chi_h(x,s)ds\right)\left(\int_0^{+\infty} \chi_{\{|x-y|<\tau\}}\tau^{-\lambda-1}d\tau\right)\right] dx\, dy \leq c$$

ovvero, usando Fubini, che $\displaystyle\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} \frac{I(t,s,\tau)}{\tau^{\lambda+1}} dtdsd\tau \leq c$

ove si é posto $\quad I(t,s,\tau) := \int_{\mathbf{R}^N\times\mathbf{R}^N} \chi_f(x,t)\ \chi_h(y,s)\ \chi_{\{|x-y|<\tau\}}\ dx\, dy$.
Osserviamo che

$$\chi_{\{|x-y|<\tau\}} \leq 1 \quad \Rightarrow \quad I \ \leq \ |(f>t)| \ |(h>s)|$$

$$\begin{array}{lll} \chi_h \leq 1 & \Rightarrow & I \ \leq \ volB_\tau \,|(f>t)| \ = \ c_N \ \tau^N |(f>t)| \\ \chi_f \leq 1 & \Rightarrow & I \ \leq \ volB_\tau \,|(h>s)| = c_N \ \tau^N \,|(h>s)| \\ & \Rightarrow & I \leq \dfrac{c_N\,\tau^N \,|(f>t)| \ |(h>s)|}{\max\{c_N\,\tau^N, \ \ |(f>t)|, \ \ |(h>s)|\}} \end{array}$$

Sostituendo τ con $c_N^{\frac{1}{N}} \ \tau$, otteniamo

$$\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} \frac{I(t,s,\tau)}{\tau^{\lambda+1}}\,dt\,ds\,d\tau \ \leq$$

$$\leq \ c_N^{\frac{\lambda}{N}} \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} \frac{1}{\tau^{\lambda+1}} \frac{\tau^N \,|(f>t)| \ |(h>s)|}{\max\{\ \tau^N, \ \ |(f>t)|, \ \ |(h>s)|\}}\,d\tau \right) \ ds\,dt$$

Passo 1 Per ogni s,t si ha

$$\int_0^{+\infty} \frac{I(t,s,\tau)}{\tau^{\lambda+1}}\,d\tau \ \leq \ \frac{N\,c_N^{\frac{\lambda}{N}}}{\lambda(N-\lambda)} \ \min\{|(h>s)| \ |(f>t)|^{\frac{N-\lambda}{N}}, \ |(f>t)| \ |(h>s)|^{\frac{N-\lambda}{N}}\}$$

Infatti, se $\quad |(h>s)| \leq |(f>t)|, \quad$ allora

$$\frac{\tau^N \,|(f>t)| \ |(h>s)|}{\max\{\ \tau^N, \ \ |(f>t)|, \ \ |(h>s)|\}} \ \leq \ \frac{\tau^N \,|(f>t)| \ |(h>s)|}{\max\{\tau^N, \ \ |(f>t)|\}}$$

e quindi

$$\int_0^{+\infty} \frac{I(t,s,\tau)}{\tau^{\lambda+1}} d\tau \leq c_N^{\frac{\lambda}{N}} \left[\int_0^{|(f>t)|^{\frac{1}{N}}} \frac{\tau^N \ \ |(h>s)|}{\tau^{\lambda+1}}\,d\tau \ + \ \int_{|(f>t)|^{\frac{1}{N}}}^{\infty} \frac{|(f>t)| \ |(h>s)|}{\tau^{\lambda+1}}\,d\tau \right]$$

$$= \ \frac{c_N^{\frac{\lambda}{N}}}{N-\lambda}\,|(h>s)| \ |(f>t)|^{\frac{N-\lambda}{N}} + \frac{c_N^{\frac{\lambda}{N}}}{\lambda}\,|(h>s)| \ |(f>t)|^{1-\frac{\lambda}{N}} =$$

$$= \frac{N c_N^{\frac{\lambda}{N}}}{\lambda(N-\lambda)} |(h>s)| \ |(f>t)|^{\frac{N-\lambda}{N}} \ \leq \ \frac{N c_N^{\frac{\lambda}{N}}}{\lambda(N-\lambda)} |(f>t)| \ |(h>s)|^{\frac{N-\lambda}{N}}$$

Scambiando h ed f, si ottiene

$$|(h>s)| \geq |(f>t)| \quad \Rightarrow \quad \int_0^{+\infty} \frac{I(t,s,\tau)}{\tau^{\lambda+1}} d\tau \leq \frac{N c_N^{\frac{\lambda}{N}}}{\lambda(N-\lambda)} |(f>t)|\,|(h>s)|^{\frac{N-\lambda}{N}} \ \leq$$

$$\leq \ \frac{N c_N^{\frac{\lambda}{N}}}{\lambda(N-\lambda)} \ |(h>s)| \ |(f>t)|^{\frac{N-\lambda}{N}}$$

Dal Passo 1 otteniamo

$$\forall T > 0: \qquad \frac{\lambda(N-\lambda)}{N c_N^{\frac{\lambda}{N}}} \int_{\mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^N} \frac{h(x)\ f(y)}{|x-y|^\lambda} dxdy \leq$$

$$\leq \int_0^\infty \left(|(h>s)| \int_0^T \ |(f>t)|^{\frac{N-\lambda}{N}}\, dt \right) ds + \int_0^\infty \left(\ |(h>s)|^{\frac{N-\lambda}{N}} \int_T^\infty |(f>t)|\, dt \right) ds$$

Ora,

$$\int_0^T \ |(f>t)|^{\frac{N-\lambda}{N}}\, dt = \int_0^T \ |(f>t)|^{\frac{N-\lambda}{N}} t^{(p-1)\frac{N-\lambda}{N}}\ t^{-(p-1)\frac{N-\lambda}{N}}\, dt \ \leq$$

$$\leq \left(\int_0^\infty |(f>t)| t^{p-1}\, dt \right)^{\frac{N-\lambda}{N}} \ \left(\int_0^T t^{-(p-1)\frac{N-\lambda}{\lambda}}\, dt \right)^{\frac{\lambda}{N}} =$$

$$= \left(\frac{1}{p} \right)^{\frac{N-\lambda}{N}} \left[\frac{T^{[1-(p-1)\frac{N-\lambda}{\lambda}]}}{1-(p-1)\frac{N-\lambda}{\lambda}} \right]^{\frac{\lambda}{N}} \ = \ c(\lambda, N, p) T^{(r-1)\frac{p}{r}}$$

perché $\quad \frac{1}{p} + \frac{\lambda}{N} + \frac{1}{r} = 2 \quad \Rightarrow$

$$\frac{\lambda}{N} - (p-1)\frac{N-\lambda}{N} = 1 - p + \frac{p\lambda}{N} = 2p - \frac{p}{r} - p = (r-1)\ \frac{p}{r}$$

Dunque, prendendo $\quad T = s^{\frac{r}{p}}, \quad$ vediamo che

$$p \int_0^{+\infty} |(f>t)| t^{p-1} ds = 1 = r \int_0^{+\infty} |(h>s)| s^{r-1} ds \qquad \Rightarrow$$

$$\int_0^\infty \left(|(h>s)| \int_0^{s^{\frac{r}{p}}} \ |(f>t)|^{\frac{N-\lambda}{N}}\, dt \right) ds \ \leq$$

$$\leq \ c(N, \lambda, p) \ \int_0^\infty \ |(h>s)| \ \ s^{r-1}\, ds \ = \ \frac{c(N, \lambda, p)}{r}$$

Analoga limitazione per il secondo integrale: usando Fubini e poi Holder,

$$\int_0^\infty \left(\ |(h>s)|^{\frac{N-\lambda}{N}} \int_{s^{\frac{r}{p}}}^\infty |(f>t)|\, dt \right) ds = \int_0^\infty \left(\ |(f>t)| \int_0^{t^{\frac{p}{r}}} \ |(h>s)|^{\frac{N-\lambda}{N}}\, ds \right) dt =$$

$$= \int_0^\infty \left(\ |(f>t)| \int_0^{t^{\frac{p}{r}}} \ |(h>s)|^{\frac{N-\lambda}{N}} s^{(r-1)\frac{N-\lambda}{N}}\ s^{-(r-1)\frac{N-\lambda}{N}}\, ds \right) dt \leq$$

$$\leq \int_0^\infty \ |(f>t)| \left(\int_0^\infty |(h>s)| s^{r-1}\, ds \right)^{\frac{N-\lambda}{N}} \ \left(\int_0^{t^{\frac{p}{r}}} s^{-(r-1)\frac{N-\lambda}{\lambda}}\, ds \right)^{\frac{\lambda}{N}} dt \ =$$

$$c(\lambda, N, p, r) \int_0^\infty \ |(f>t)| \ t^{[\frac{\lambda}{N}-(r-1)\frac{N-\lambda}{N}]\frac{p}{r}}\, dt \ = \ c(\lambda, N, p, r) \ \int_0^\infty \ |(f>t)| \ t^{p-1}\, dt.$$

AM5 2008 - Tracce delle lezioni 10

IL LEMMA DI RICOPRIMENTO DI VITALI

ed

IL TEOREMA DI LEBESGUE-BESICOVITCH

Ricoprimento di Vitali. Sia $A \subset \mathbf{R}^N$. Sia $\mathcal{V}$ famiglia di **palle chiuse**. $\mathcal{V}$ si dice ricoprimento fino (o di Vitali di) A se

$$\forall x \in A, \quad \exists B_r(x) \in \mathcal{V} \qquad \text{e} \qquad \inf\{r > 0 : B_r(x) \in \mathcal{V}\} = 0$$

ESEMPIO. Sia A aperto. Fissato $r > 0$, l'insieme delle palle chiuse contenute in A e di raggio minore di r é ricoprimento di Vitali di A.

Lemma di Vitali. Sia $A \subset \Omega \subset \mathbf{R}^N$, Ω aperto di misura finita. Sia $\mathcal{V}$ ricoprimento di Vitali di A, $\mathcal{V}_\Omega := \{B \in \mathcal{V} : \ B \subset \Omega\}$. Allora

$$\exists B_j \in \mathcal{V}_\Omega : \quad B_i \cap B_j = \emptyset \ \ \forall i \neq j \quad \text{e} \quad L^N(A \setminus \cup_j B_j) = 0$$

ESEMPIO. Sia Ω aperto, $\delta > 0$. Allora esiste una famiglia numerabile di palle chiuse $B_j \subset \Omega$ disgiunte di raggio minore di δ e tali che $L^N(\Omega \setminus \cup_j B_j) = 0$

Prova. Nel seguito indicheremo con $B_r(x)$ una palla in $\mathcal{V}$ di raggio r e centro x e con $r = r(B)$ il raggio di un generico elemento B di $\mathcal{V}$. Indichiamo $\Omega_1 := \Omega$. Posto

$$\delta_1 := \sup\{r(B) : B \subset \Omega_1, \}, \qquad \text{sia} \qquad B_1 \subset \Omega_1 \ : \quad r_1 := r(B_1) \geq \frac{\delta_1}{2}$$

Posiamo supporre (se no la dimostrazione é finita) che $\exists x \in A \setminus B_1$ e quindi $\exists\, B(x) \in \mathcal{V}$: $B \subset \Omega_2 := \Omega_1 \setminus B_1$. Posto

$$\delta_2 := \sup\{r(B) : B \subset \Omega_2\} \leq \delta_1 \qquad \text{sia} \qquad B_2 \subset \Omega_2 \ : \quad r_2 := r(B_2) \geq \frac{\delta_2}{2}$$

Ovviamente $B_1 \cap B_2 = \emptyset$. Possiamo supporre, come sopra, che $\exists\, B \in \mathcal{V}$: $B \subset \Omega_3 := \Omega_2 \setminus B_2$, e, iterando, si trova (salvo terminare la dimostrazione in un numero finito di passi) che

$$\forall n \in \mathbf{N},\ \exists\ B_n \in \mathcal{V} : \quad B_{n+1} \subset \Omega_{n+1} := \Omega_n \setminus B_n = \Omega_1 \setminus \left(\cup_{j=1}^n B_j \right) \quad \text{con}$$

$$r_{n+1} := r(B_{n+1}) \geq \frac{\delta_{n+1}}{2}, \qquad \delta_{n+1} := \sup\{r(B) : B \subset \Omega_{n+1}\} \leq \delta_n$$

Notiamo che, siccome le palle B_n sono disgiunte, allora

$$c_N \sum_n r_n^N = L^N(\cup_n B_n) \leq L^N(\Omega_1) < +\infty \Rightarrow r_n \to_n 0 \Rightarrow \delta_n \to_n 0.$$

Ció comporta che ogni palla B deve intersecare qualche B_k, perché

$$B \cap [\cup_{k=1}^n B_k] = \emptyset \Rightarrow B \subset \Omega_{n+1} \Rightarrow r(B) \leq \delta_{n+1}$$

A sua volta ció comporta che, indicata con $\tilde{B}_n$ la palla concentrica a B_n e di raggio $r(\tilde{B}_n) = 5r_n$, allora

$$(*) \qquad x \in A, \quad x \notin \cup_{j=1}^{n-1} B_j \Rightarrow \exists k \geq n : \qquad x \in \tilde{B}_k$$

Infatti, $x \in A$, $x \notin \cup_{j=1}^{n-1} B_j \Rightarrow \exists B(x) \in \mathcal{V}$, $B(x) \subset \Omega_n = \Omega \setminus \cup_{j=1}^{n-1} B_j$ con $B(x)$ palla centrata in x di raggio, diciamo, $r(x)$. D'accordo con quanto sopra osservato, esiste un primo indice $k \geq n$ tale che $B(x) \cap B_k \neq \emptyset$.

Dunque $\quad B(x) \subset \Omega_k = \Omega \setminus \cup_{j=1}^{k-1} B_j \quad$ e quindi $\quad r(x) \leq \delta_k \leq 2r_k$

Siccome $B(x) \cap B_k \neq \emptyset$, concludiamo che $B(x)$ é contenuta nella palla che ha lo stesso centro di B_k e raggio $5r_k$, cioé appunto $\tilde{B}_k$. Da $(*)$ segue che

$A \setminus (\cup_n B_n) \subset \cup_{k \geq n} \tilde{B}_k \quad \forall n. \qquad$ Ma $\qquad L^N \left(\cup_{k \geq n} \tilde{B}_k \right) \leq c_N 5^N \sum_{k=n}^{\infty} r_n^N \to_n 0$

e quindi
$$L^N (A \setminus (\cup_n B_n)) \leq c_N 5^N \sum_{k=n}^{\infty} r_n^N \to_n 0$$

NOTA. Il Lemma vale anche con $\mu \prec\prec L^N$ al posto di L^N. In effetti si puó provare che vale per qualsiasi misura di Borel regolare.

Lemma 1. Sia $f \in L^1(\mathbf{R}^N)$, $f \geq 0$ e $f^\sharp(x) := \limsup_{r \to 0} \frac{1}{vol B_r(x)} \int_{B_r(x)} f(y)\, dy$. Se $c > 0$ e $A \subset \{f^\sharp \geq c\}$, allora

$$\int_\Omega f(y)\, dy \geq c\, L^N(A) \qquad \forall\, \Omega \text{ aperto contenente } A$$

NOTA Se $\varphi := \frac{1}{vol B_1} \chi_{B_1}$, $\varphi_r = \frac{1}{r^N} \varphi(\frac{x}{r})$, é $\qquad f^\sharp(x) = \limsup_{r \to 0} (f * \varphi_r)(x).$

Prova. Sia $A \subset \{x : \ f^\sharp(x) \geq c\}$, di misura finita. Fissato $0 < \epsilon < c$,

$$x \in A \quad \Rightarrow \quad \exists r_j \to 0 : \quad \frac{1}{vol B_{r_j}(x)} \int\limits_{B_{r_j}(x)} f(y)\, dy \ \geq \ c - \epsilon$$

Dunque, $\mathcal{V} := \{B_r(x) : \quad x \in A, \ \frac{1}{vol B_r(x)} \int\limits_{B_r(x)} f(y) \geq c - \epsilon\}$ é un ricoprimento fino di A. Fissato Ω aperto, $A \subset \Omega$, dal Lemma di Vitali otteniamo

$\exists B_j \in \mathcal{V}, \ B_j \subset \Omega$ palle chiuse disgiunte tali che $L^N(A \setminus \cup_j B_j) = 0$ e quindi

$$L^N(A) \leq L^N\left((A \setminus \cup_j B_j) \cup_j B_j\right) \leq \sum_j vol(B_j) \leq \frac{1}{c-\epsilon} \sum_j \int\limits_{B_j} f \leq \frac{1}{c-\epsilon} \int\limits_{\Omega} f$$

In particolare, se $\Omega_j := \{|x| < j\}$, $L^N(\{f^\sharp \geq c\} \cap \Omega_j) \leq \int f < +\infty \ \forall\, j$, e quindi $L^N(\{f^\sharp \geq c\} \leq \int f < +\infty$.

Il Lemma 1 ha la seguente (ovvia ma importante) estensione:

Lemma 2. Sia ν misura boreliana in $\mathbf{R}^N$ tale che

$$\forall\, A \subset \mathbf{R}^N : \qquad \nu(A) = \inf\{\nu(\Omega) : A \subset \Omega, \ \Omega \text{ aperto}\}$$

Allora, se $c > 0$, $A \subset \{x : \ \limsup\limits_{r \to 0} \frac{\nu(B_r(x))}{vol(B_r(x))} \geq c\} \ \Rightarrow \ \nu(A) \geq c\, \nu(A)$

Prova. Sia $A_n := A \cap B_n$, B_n palla aperta di raggio n. Fissato $\epsilon \in (0, c)$,

$$x \in A_n \quad \Rightarrow \quad \exists r_j \to 0 : \quad \frac{\nu(B_{r_j}(x))}{vol(B_{r_j}(x))} \ \geq \ c - \epsilon$$

Dunque, $\mathcal{V} := \{B_r(x) : \quad \frac{\nu(B_r(x))}{vol(B_r(x))} \geq c - \epsilon\}$ é un ricoprimento fino di A_n. Fissato Ω aperto contenente A e posto $\Omega_n := \Omega \cap B_n$, dal Lemma di Vitali otteniamo

$\exists B_j \in \mathcal{V}$ tali che $L^N(A_n \setminus \cup_j B_j) = 0$. Come sopra,

$$L^N(A_n) \leq \sum_j vol(B_j) \leq \frac{1}{c-\epsilon} \sum_j \nu(B_j) \leq \frac{1}{c-\epsilon}\, \nu(\Omega_n)$$

Siccome ν é borel regolare, si ottiene

$$L^N(A) = \lim_n L^N(A_n)\,(c - \epsilon) \ \leq \ \nu(\Omega)$$

La tesi segue dall'ipotesi $\nu(A) = \inf\{\nu(\Omega) : \Omega \quad \text{aperto}, \quad A \subset \Omega\}$.

NOTA. Come nel Lemma di Vitali, il Lemma 2 continua a valere se a L^N si sostituisce una qualsiasi misura di borel regolare.

Il Teorema di differenziazione di Lebesgue-Besicovitch

Sia $f \in L^1_{loc}(\mathbf{R}^N)$. Allora

$$\frac{1}{vol(B_r)} \int\limits_{B_r(x)} |f(x) - f(y)|\, dy \ \to_{r\to 0} 0 \qquad q.o.\ x$$

In particolare, $\frac{1}{vol(B_r)} \int\limits_{B_r(x)} f(y)\, dy \ \to_{r\to 0} f(x) \qquad q.o.\ x$

NOTA. Se f é continua, la conclusione é vera per ogni x:

$$\forall r, \quad \exists \xi(r) \in B_r(x) : \quad \frac{1}{vol(B_r)} \int\limits_{B_r(x)} |f(y) - f(x)|\, dy \ = \ |f(\xi(r)) - f(x)| \to_{r\to 0} \ 0$$

Prova. Possiamo supporre, sostituendo f con $f\,\chi_{B_R}$, che sia $f \in L^1(\mathbf{R}^N)$. Posto

$$L(x) := \limsup_{r\to 0} \left[\frac{1}{vol B_r} \int\limits_{B_r(x)} |f(x) - f(y)|\, dy \right]$$ si tratta di provare che

$$L^N(\{x : \quad L(x) \ \geq \ \alpha\}) \ = \ 0 \quad \forall \alpha > 0.$$ Fissata $\varphi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^N)$

si ha $$L(x) \leq \ \limsup_{r\to 0} \left[\frac{1}{vol B_r} \int\limits_{B_r(x)} (|f(x) - \varphi(y)| + |\varphi(y) - f(y)|)\ dy \right] \leq$$

$\leq \ |f(x) - \varphi(x)| + |f - \varphi|^\sharp(x).$ Fissato $\alpha > 0$ si ha quindi

$$\{x : \quad L(x) \ \geq \ \alpha\} \ \subset \ \{x : \quad |f(x) - \varphi(x)| \geq \frac{\alpha}{2}\} \ \cup \ \{x : \quad (f - \varphi)^\sharp(x) \geq \ \frac{\alpha}{2}\}$$

e quindi, per il Lemma 1, $L^N(\{x : \quad L(x) \ \geq \ \alpha\}) \ \leq$

$$\leq \ L^N(\{x : \quad |f(x) - \varphi(x)| \geq \frac{\alpha}{2}\}) + L^N(\{x : \quad |f - \varphi|^\sharp(x) \geq \ \frac{\alpha}{2}\}$$

$$\leq \frac{2}{\alpha} \int\limits_{|f-\varphi| \geq \frac{\alpha}{2}} |f - \varphi| \ + \int\limits_{\mathbf{R}^N} |f - \varphi| \ \ \leq \ \frac{4}{\alpha} \int\limits_{\mathbf{R}^N} |f - \varphi|$$ e quindi

$$L^N(\{x : \quad L(x) \ \geq \ \alpha\}) \ \ \leq \ \ \frac{4}{\alpha} \ \inf \left\{ \int\limits_{\mathbf{R}^N} |f - \varphi| \ : \quad \varphi \in C_0^\infty \right\} \ = \ 0$$

Corollario 1. Sia $f \in L^1_{loc}(\mathbf{R})$. Allora

$$\frac{d}{dx} \int\limits_a^x f(t)\, dt \; = \; f(x) \quad q.o. \; x$$

Prova. Applicando L-B, otteniamo quasi per ogni x,

$$|\frac{1}{r} \int\limits_x^{x+r} f(t)\, dt \; - \; f(x)| \; = \; |\frac{1}{r} \int\limits_x^{x+r} f(t)\, dt \; - \; \frac{1}{r} \int\limits_x^{x+r} f(x)\, dt| \leq$$

$$\leq \frac{2}{2|r|} \int_{x-|r|}^{x+|r|} |f(t) - f(x)|\, dt \rightarrow_{r \rightarrow 0}$$

NOTA. Il Corollario 1 vale anche con μ misura di Radon al posto di L^1.

Corollario 2. Sia μ misura boreliana finita in $\mathbf{R}^N$, $\mu = \mu_{ac} + \mu_s$ decomposizione di Lebesgue di μ rispetto alla misura di lebesgue L^N. Allora

$$\frac{d\mu}{dx} \; := \; \frac{d\mu}{dL^N}(x) := \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\mu(B_r(x))}{vol(B_r)}$$

esiste L^N-quasi ovunque, é L^N-sommabile e

$$\mu_{ac}(E) \; = \; \int_E \frac{d\mu}{dL^N}\, dL^N$$

Infatti, per Radon-Nikodym, esiste $f \in L^1(\mathbf{R}^N)$ tale che $\mu_{ac}(E) \; = \; \int_E f\, dL^N$. Quindi

$$\frac{\mu(B_r(x))}{vol(B_r)} \; = \; \frac{\int_{B_r(x)} f \; + \; \mu_s(B_r(x))}{vol(B_r)} \rightarrow_r f(x) \quad L^N - q.o. \; x$$

in virtú di L-B e del seguente

Lemma 3. Sia ν misura di Radon singolare rispetto a L^N. Allora

$$\frac{\nu(B_r(x))}{L^N(B_r(x))} \rightarrow_{r \rightarrow 0} 0 \quad q.o.x$$

Infatti, sia $L^N(Z) = 0 = \nu(Z^c)$. Allora, per ogni $c > 0$, si ha

$$L^N(\{x : \; \limsup_{r \rightarrow 0} \frac{\nu(B_r(x))}{volB_r(x)} \geq c\} \; = \; L^N(\{x \in Z^c : \; \limsup_{r \rightarrow 0} \frac{\nu(B_r(x))}{volB_r(x)} \geq c\} \leq$$

$$\leq \frac{1}{c} \nu(\{x \in Z^c : \; \limsup_{r \rightarrow 0} \frac{\nu(B_r(x))}{volB_r(x)} \geq c\}) = 0$$

Funzione di distribuzione di una misura di Radon in R.

Se μ é misura di Radon in $\mathbf{R}$, tale che $\mu((-\infty, x)) < +\infty \ \forall x$, resta definita la **funzione di distribuzione di** μ :

$$F_\mu(x) \ := \ \mu((-\infty, x)) \ = \int_{-\infty}^{x} d\mu$$

Nota che $F := F_\mu$ é non decrescente, $F(-\infty) = 0$ e

$x < b \Rightarrow F(b) - F(x) = \mu([x, b)) \to_{x \to b^-} 0, \qquad x > b \Rightarrow F(x) - F(b) \to_{x \to b^+} \mu(\{b\})$

e quindi F_μ **é continua a sinistra in** b **ed é continua in** b **se e solo se** $\mu(\{b\}) = 0$**.**

Esempio. Se $\mu_f(E) := \int_E f dx$, $f \geq 0$ Lebesgue integrabile, allora $F := F_{\mu_f}$ non é altro che la funzione integrale di f.

Inoltre $\qquad F_\mu$ **é derivabile** L^1**-quasi ovunque e** $\quad \frac{dF_\mu}{dx}(x) = \frac{d\mu}{dx} \ q.o.x.$

Infatti, dal Corollario 2:

$$\mu(E) = \int_E \frac{d\mu}{dx} dx + \mu_s(E) \quad \forall E \text{ boreliano, e quindi} \quad F_\mu(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{d\mu}{dt} dt + \mu_s((-\infty, x))$$

Si tratta quindi di mostrare che la funzione di distribuzione di una misura singolare (rispetto alla misura di Lebesgue) ha derivata nulla q.o.. Ció segue dal Lemma 3:

$$\left| \frac{1}{t}[\mu_s((-\infty, x+t)) - \mu_s((-\infty, x))] \right| \ \leq \ 2 \ \frac{\mu_s\,(\,[\,x - |t|, x + |t|\,]\,)}{2|t|} \to_{t \to 0} 0$$

Possiamo quindi scrivere: $\qquad F_\mu(x) \ = \int_{-\infty}^{x} F'_\mu(t)\, dt \ + \ \mu_s((-\infty, x))$

Problema 1.

Quali funzioni sono distribuzioni di misure (e sono, in particolare, derivabili q.o.)?

Lo sono tutte le funzioni F nondecrescenti inferiormente limitate e 'normalizzate' (cioé continue a sinistra in ogni punto). Ovvero, se F é non decrescente, inferiormente limitata e $\lim\limits_{x \to x_0^-} F(x) = F(x_0)$ per ogni x_0, allora esiste una misura di Borel μ_F tale che $F(x) \ := \ \mu_F((-\infty, x)) \ \forall x$ e quindi

F é derivabile q.o. e $\qquad F(x) = F(-\infty) + \int_{-\infty}^{x} F'(t) dt \ + \ (\mu_F)_s((-\infty, x))$

Sostituendo F con $F(x) - F(-\infty)$, possiamo supporre che $F(-\infty) = 0$. Sia

$$\mu_F(A) := \inf \{ \sum_{j=1}^{\infty} [\, F(b_j) - F(a_j) \,] : \quad A \subset \cup_j \, [\, a_j, \, b_j \,) \, \}.$$

É facile vedere che μ_F é misura metrica e quindi Boreliana ed infatti di Radon (μ si chiama misura di Lebesgue-Stieltijes generata da F). Inoltre , chiaramente, $\mu([a,b)) = F(b) - F(a)$ e quindi $\mu((-\infty, x)) = F(x) \quad \forall x \in \mathbf{R}$ e ció, per quanto visto, prova quanto asserito: $\frac{dF}{dx}(x) = \frac{d\mu_F}{dx}$.

Notiamo infine che $\mu(\{b\}) = [\, \lim_{t \to b^+} F(t) \,] - F(b)$ é, in b, il 'salto' di F.

ESEMPIO. Sia $F(x) = \chi_{(0,+\infty)}$. É $F(x) = \delta_0((-\infty, x))$.

Corollario: le funzioni monotone sono derivabili q.o. con derivata localmente sommabile.

Problema 2.

Per quali funzioni F derivabili q.o. e con derivata (localmente) sommabile si ha

$$F(x) = F(a) + \int_a^x F'(t)dt \qquad (Torricelli - Newton)\,?$$

ESEMPIO. La funzione di Cantor f (che é continua e non decrescente), é derivabile q.o. con derivata nulla nel complementare dell'insieme di Cantor (ove é localmente costante), ma non é l'integrale della sua derivata: $f(x) \neq \int_0^x f' \equiv 0$!.

La formula di Torricelli-Newton per F monotona (con $F(-\infty) = 0$) dice che

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} F'(t)dt \quad \Leftrightarrow \quad (\mu_F)_s = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mu_F \text{ é assolutamente continua.}$$

Proposizione 1. Sia $F(x) = \mu((-\infty, x))$. Allora μ é assolutamente continua se e solo se F é assolutamente continua (AC) nel senso seguente.

Sia $F : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$. Dati $I_j = (a_j, b_j), \; j = 1, \ldots, p, \; I_i \cap I_j = \emptyset \; \forall i \neq j$, scriveremo

$$\omega[F, \{a_j, b_j\}] := \sum_{j=1}^{p} |F(b_j) - F(a_j)|$$

Definizione (di funzione AC). F é AC in $[a, b]$ se $\forall \epsilon > 0, \; \exists \delta > 0$:

$$\sum_{j=1}^{p} (b_j - a_j) \leq \delta \;\; \Rightarrow \;\; \omega[F, \{a_j, b_j\}] \leq \epsilon$$

Dimostrazione della Prop. 1. Se μ é assolutamente continua, allora, per Radon-Nikodym, esiste una f localmente sommabile tale che $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f dt$. L'assoluta continuitá di F é allora conseguenza dell'assoluta continuitá dell'integrale. Viceversa, sia F assolutamente continua. Allora

$$A \subset \cup_j (a_j, b_j), \ \sum_{j=1}^{\infty} (b_j - a_j) \leq \delta \ \Rightarrow \ \mu(A) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu([a_j, b_j))$$

$$\leq \sum_{j=1}^{\infty} [\, \mu((-\infty, b_j) \ - \ \mu((-\infty, a_j)\,] \ \leq \sum_{j=1}^{\infty} [\, F(b_j) - F(a_j)\,] \leq \epsilon$$

Dunque $L^1(A) = 0 \ \Rightarrow \ \mu(A) = 0$.

Dunque, nella classe delle funzioni monotone la validitá di (TN) equivale alla assoluta continuitá.

Definizione di funzioni BV (funzioni a variazione limitata)

F é BV in $[a, b]$ se $V_a^b(F) := \sup \{\omega[F, \{a_j, b_j\}] \ : \ (a_j, b_j) \subset [a, b]\} < +\infty$

Esempio. Le funzioni monotone limitate, la differenza di funzioni monotone limitate.

Lemma.

(i) $V_a^x(F)$ é non decrescente e $x < y \ \Rightarrow \ V_a^y(F) = V_a^x(F) + V_x^y(F)$

(ii) $G(x) := V_a^x(F) - F(x)$ é non decrescente

(iii) F é AC in $[a, b] \ \Rightarrow \ F$ é BV in $[a, b]$ e $V_a^x(F)$ é AC.

La (i) si verifica facilmente. La (ii) segue da $x < y \ \Rightarrow \ |F(x) - F(y)| \leq V_x^y(F)$. (iii): F é AC $\Rightarrow \ \exists \delta : \ V_x^{x+\delta}(F) \leq 1 \ \forall x \in [a, b - \delta]$. Ció implica che F é BV.

Proposizione. Se F é BV in $[a, b]$, allora F é derivabile q.o. in $[a, b]$.

Inoltre, vale (T-N), cioé $F(x) = F(a) + \int_a^x F'(t)dt$ se e solo se F é AC

Estendiamo F : $F(x) = F(a) \ \forall x \leq a, \ F(x) = F(b) \ \forall x \geq b$. Dal Lemma segue che $F = V_a^x(F) - [V_a^x(F) - F]$ é differenza di due funzioni monotone limitate e quindi é derivabile q.o. Se poi F é AC, allora $F = F_1 - F_2$ con F_i nondecrescenti e AC: (T-N) vale per le F_i e quindi vale anche per F.

AM5 2008: Tracce delle lezioni- 11

MISURE DI HAUSDORFF E FORMULE DI AREA E COAREA

Misura di Hausdorff s-dimensionale. Sia $A \subset \mathbf{R}^n$, $0 \le s < \infty$, $0 < \delta$.

$$H^s_\delta(A) := \inf\{\sum_{j=1}^{\infty} \alpha(s) \left(\frac{diam\, C_j}{2}\right)^s : \quad A \subset \cup_{j=1}^{\infty} C_j,\ diam\, C_j \le \delta\}$$

ove $\alpha(s) = \frac{\pi^{\frac{s}{2}}}{\Gamma(\frac{s}{2}+1)}$, $\Gamma(t) := \int\limits_0^\infty e^{-x}x^{t-1}dx$, $0 < t < \infty$. Notare che $\alpha(n) = volB^n$ ove B^n é la palla unitaria in $\mathbf{R}^n$.
Chiaramente $H^s_\delta(A)$ cresce al decrescere di δ e la misura di Hausdorff s-dimensionale in $\mathbf{R}^n$ é allora cosi definita:

$$H^s(A) := \sup_{\delta>0} H^s_\delta(A) = \lim_{\delta\to 0} H^s_\delta(A)$$

Si mostrano facilmente le seguenti proprietá:

Proposizione 1. Sia $0 \le s$. Sia $A \subset \mathbf{R}^n$.

(i) H^s é misura metrica e quindi é misura di Borel regolare

(ii) $H^s \equiv 0$ se $s > n$.

(iii) Se $0 \le s < t$ allora $H^s(A) < \infty \Rightarrow H^t(A) = 0$

(iv) Se $L \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^n)$ é isometria, allora $H^s(L(A) + h) = H^s(A)\ \forall h \in \mathbf{R}^n$

(v) $H^s(rA) = r^s H^s(A)$ per ogni $r > 0$.

(vi)$f \in C(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$, $|f(x) - f(y)| \le c|x - y|\ \forall x, y\ \Rightarrow\ H^s(f(A)) \le c^s H^s(A)$

(vii) $H^1 = L^1$ in $\mathbf{R}$....per provare che $H^n = L^n$ in ogni $\mathbf{R}^n$ occorre...

La diseguaglianza isodiametrica.

Tra gli insiemi aventi lo stesso diametro la palla é quello che ha maggior volume:

$$(DID) \qquad L^N(A) \le \alpha(N) \left(\frac{diam\ A}{2}\right)^N = vol\ B_{\frac{diam\ A}{2}}$$

Per provare (DID) cominciamo con l'osservare che (DID) vale banalmente se A é simmetrico rispetto all'origine: da $x \in A \Rightarrow -x \in A$ segue che $2|x| \leq diam\ A$, ovvero $A \subset B_{\frac{diam\ A}{2}}$. Per concludere la dimostrazione basterá applicare il

Lemma (di simmetrizzazione)

Per ogni $A \subset \mathbf{R}^N$ esiste A^* simmetrico (il 'simmetrizzato' di A) e tale che

$$(i)\ diam\ A^* \leq diam\ A, \qquad (ii) L^N(A^*) = L^N(A) \quad \text{se } A \text{ é misurabile}$$

Infatti, tale Lemma, applicato alla chiusura $\overline{A}$ di A, dá $\quad L^N(A) \leq$

$$\leq L^N(\overline{A}) = L^N((\overline{A})^*) \leq \alpha(N)\left(\frac{diam\ (\overline{A})^*}{2}\right)^N \leq \alpha(N)\left(\frac{diam\ \overline{A}}{2}\right)^N = \alpha(N)\left(\frac{diam\ A}{2}\right)^N.$$

La dimostrazione del Lemma si basa sulla **'simmetrizzazione di Steiner'** di un insieme A, che consiste in: 1) fissare un iperpiano coordinato 2) sezionare A con rette ortogonali a tale iperpiano 3) misurare ogni sezione , dando origine a intervalli aventi come lunghezza la misura di ciascuna sezione 4) sistemare ciascuno di tali intervalli, in posizione simmetrica rispetto all'iperpiano, lungo la retta che lo ha generato. In tal modo, usando Fubini, si vede che non si altera la misura dell'insieme, mentre il diametro, eventualmente, diminuirá. Tale operazione va effettuata a partire dal primo iperpiano coordinato, e ripetuta poi sul secondo fino all' N-esimo iperpiano coordinato, ottenendo alla fine l'insieme A^* avente le proprietá richieste.

Proposizione 2. $H^N \equiv L^N$ in $\mathbf{R}^N$ per ogni $N \geq 1$.

NOTA. In particolare, la misura di Lebesgue L^N é invariante per isometrie.

Prova. Sia A misurabile. Che sia $L^N(A) \leq H^N(A)$ segue subito da (DID):

$$A \subset \cup_j C_j \ \Rightarrow L^N(A) \leq \alpha(N) \sum_j \left(\frac{diam\ C_j}{2}\right)^N$$

Per vedere che $H^N(A) \leq L^N(A)$, notiamo intanto che $H^N(A) \leq \frac{\alpha(N) N^{\frac{N}{2}}}{2^N} L^n(A)$. Poi, se $\epsilon > 0$ e $R_j \subset \mathbf{R}^N$ sono tali che $\sum_j vol\ (R_j) \leq L^N(A) + \epsilon$, per il Lemma di Vitali si possono trovare B_k^j palle chiuse contenute nell'interno di R_j e tali che

$$diam\ B_k^j \leq \delta, \quad L^N\left(R_j \setminus \cup_k B_k^j\right) = 0 \quad \text{e quindi,} \quad H^N\left(R_j \setminus \cup_k B_k^j\right) = 0. \quad \text{Quindi}$$

$$\sum_{j,k} \alpha(N)\left(\frac{diam\ B_k^j}{2}\right)^N = \sum_{j,k} vol(B_k^j) = \sum_j L^N\left(\cup_k B_k^j\right) = \sum_j L^N(R_j) \leq L^N(A) + \epsilon$$

Jacobiano di una trasformazione lineare.

Sia $L \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$ (cioé L é trasformazione lineare di $\mathbf{R}^n$ in $\mathbf{R}^m$). Nel seguito identificheremo L con la sua matrice rappresentativa nelle basi canoniche per $\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m$.
Sia $L' \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^m, \mathbf{R}^n)$ l'operatore aggiunto di L, cioé $< x, L'y >_{\mathbf{R}^n} = < Lx, y >_{\mathbf{R}^m}$ per ogni $x \in \mathbf{R}^n, y \in \mathbf{R}^m$. Notiamo che $(L' \circ L)' = L' \circ L$ é operatore simmetrico di $\mathbf{R}^n$ in se ed é anche positivo perché $< L' \circ Lx, x >= \|Lx\|^2$.
In particolare, $det(L' \circ L) \geq 0$ e $L' \circ L$ é invertibile se e solo se esiste $\delta > 0$ tale che $\|Lx\| \geq \delta \|x\| \ \forall x \in \mathbf{R}^n$ mentre $L \circ L'$ é invertibile se e solo se L é suriettivo.
Richiamiamo dapprima alcuni utili fatti algebrici.

(i) Una mappa $O \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$ é **ortogonale** se conserva il prodotto scalare:
$< Ox, Oy >_{\mathbf{R}^m} = < x, y >_{\mathbf{R}^n} \qquad \forall\, x, y \in \mathbf{R}^n$ (e quindi $\|Ox\| = \|x\| \ \forall x$ ed $n \geq m$)
Poi, $\ (O' \circ O)(x) = x \ \forall x \in \mathbf{R}^n, \qquad (O \circ O')(y) = y, \quad \|O'y\| = \|y\| \ \forall\, y \in O(\mathbf{R}^n)$.
In particolare, se $n = m$, allora $\quad O' = O^{-1} \quad$ e $\quad |det\, O| = 1$

(iii) Se $S \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^n)$ é simmetrico, cioé $S = S'$, allora S é diagonalizzabile, cioé esistono $O, D \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^n)$, O ortogonale e $D = D(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ diagonale (cioé $D(x_1, \ldots, x_n) = (\lambda_1 x_1, \ldots, \lambda_n x_n)$) tali che $\quad S = O \circ D \circ O'$

(iv) Sia $L \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$.
Se $n \leq m$, esistono $S = S' \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^n)$ e $O \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$ ortogonale tali che $L = O \circ S$.
In particolare, $L' \circ L = S^2$.
Se $n \geq m$, esistono $S = S' \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^m)$ e $O \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^m, \mathbf{R}^n)$ ortogonale tali che $L = S \circ O'$.
In particolare, $L \circ L' = S^2$.

Definizione. Si chiama Jacobiano di L il numero

$$J_L := (det(L' \circ L))^{\frac{1}{2}} \quad \text{se}\, n \leq m, \qquad J_L := (det(L \circ L'))^{\frac{1}{2}} \quad \text{se}\, n \geq m$$

Chiaramente $J_L = J_{L'}$ e, se $n \leq m$ e $L = O \circ S$ oppure $n \geq m$ e $L = S \circ O'$, $J_L = |detS|$. In particolare, se $n = m$, $J_L = |detL| = |detS|$.

La formula di Cauchy-Binet.

Siano M_j i minori di ordine massimo di L. Allora

$$J_L = \left(\sum_j (det\ M_j)^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

Proposizione 3: Il significato geometrico di J_L.

Sia $L \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m), \quad n \leq m$. Allora

$$H^n(L(A)) = J_L\, L^n(A) \qquad \forall\, A \subset \mathbf{R}^n$$

NOTA. Se $n = m$, ritroviamo la formula $|detL| = vol(LQ)$, ove $Q = [0,1] \times \ldots \times [0,1]$ é il cubo unitario in $\mathbf{R}^n$.
Se $n < m$, la formula di Cauchy-Binet si legge allora cosí:
il quadrato dell'area di LQ é uguale alla somma dei quadrati delle aree delle proiezioni di LQ sugli spazi coordinati di dimensione n (teorema di Pitagora).

Prova. Sia $\quad n = m \quad$ e proviamo che $\qquad L^N(LA) = |detL|\, L^n(A) \quad \forall\, A \subset \mathbf{R}^n$.
Se $det L = 0$ é $dim L(\mathbf{R}^n) < n$ e quindi $L(\mathbf{R}^n)$ ha misura nulla. Sia dunque $det L \neq 0$.
Sia, intanto, $D(x_1, \ldots, x_n) := (\lambda_1 x_1, \ldots, \lambda_n x_n) \quad \forall\, (x_1, \ldots, x_n),\ \lambda_j \neq 0$. Se $R = I_1 \times \ldots \times I_n$, si ha $D(R) = \lambda_1 I_1 \times \ldots \times \lambda_n I_n$. Dunque $vol\ D(R) = |\lambda_1 \cdots \lambda_n| vol\ R$ ed allora

$$A \subset \cup_j R_j \Rightarrow D(A) \subset \cup_j D(R_j) \Rightarrow L^n(DA) \leq \sum_j vol\ D(R_j) = |\lambda_1 \cdots \lambda_n| \sum vol\ R_j$$

$$\Rightarrow \quad L^n(DA) \leq |\lambda_1 \cdots \lambda_n| L^n(A) = |det\ D|\ L^n(A)$$

Dall'invertibilitá di D segue che vale anche la diseguaglianza opposta.
Sia ora $S = S'$. Siano λ_j gli autovalori di S e quindi $S = O \circ D \circ O'$ ove $D = D(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ é matrice diagonale e O é ortogonale. Si ha:

$$L^n(SA) = L^n((O \circ D \circ O')(A)) = L^n(DA) = |det\ D|\ L^n(A) = |det\ S|\ L^n(A)$$

Infine, dato L, e scrivendo $L = O \circ S$, vediamo che

$$L^n(L(A)) = H^n(S(A)) = |det\ S|\ L^n(A) = |det\ L|\ L^n(A)$$

Sia infine $n < m$.
Dato L, scriviamo $L = O \circ S$. Siccome O' é isometria tra $O(\mathbf{R}^n)$ e $\mathbf{R}^n$, si ha

$$H^n(L(A)) = H^n((O' \circ O \circ S)(A)) = H^n(S(A)) = L^n(S(A)) = |detS| L^n(A) = J_L L^n(A)$$

Definizione. Sia $\varphi \in C^1(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$. Scriveremo

$$J_\varphi(x) := J_{D\varphi(x)}$$

FORMULA DI AREA.

I) Sia $n \leq m$. Sia $\varphi \in C^1(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$ iniettiva e tale che $J_\varphi > 0\, \forall x$. Sia $A \subset \mathbf{R}^n$ misurabile. Allora

$$\int_A J_\varphi(x)dx \; = \; H^n(\varphi(A))$$

II) Se $f : \mathbf{R}^m \to [-\infty, +\infty]$ é borel misurabile allora f é H^n sommabile su $\varphi(A)$ se e solo se $f \circ \varphi$ é sommabile su A e

$$\int_A f(\varphi(x))J_\varphi(x)dx \; = \; \int_{\varphi(A)} f dH^n$$

Parte I). Indichiamo i passi principali della dimostrazione.

Passo 1: misurabilitá. $A \subset \mathbf{R}^n$ misurabile $\Rightarrow \varphi(A)$ é H^n misurabile.
Se A é limitato, siano $K_j \subset A$ compatti tali che $L^n(A \setminus \cup_j K_j) = 0$. Da

$$H^n\left(\varphi(A \setminus \cup_j K_j)\right) \leq (Lip(\varphi_{|A}))^n H^n\left(A \setminus \cup_j K_j\right)) = 0$$

segue la H^n misurabilitá di $\varphi(A)$ perché $\varphi(A) = \varphi(A \setminus \cup_j K_j) \cup \varphi(\cup_j K_j)$ e $\varphi(\cup_j K_j) = \cup_j \varphi(K_j)$ é H^n-misurabile perché lo sono $\varphi(K_j)$ in quanto compatti.
Se A non é limitato, basta scrivere $\varphi(A) = \cup_k \varphi(A \cap B_k)$ ove B_k é la palla di raggio k e centro l'origine.

Passo 2: confronto col linearizzato. Sia $t \in (1, 2)$, $x \in \mathbf{R}^n$. Indichiamo $L = D\varphi(x)$. Allora esiste $\epsilon(t, x)$ tale che, se $\epsilon < \epsilon(t, x)$, si ha

$$(2-t)\,|L(x_1) - L(x_2)| \leq |\varphi(x_1) - \varphi(x_2)| \leq t\,|L(x_1) - L(x_2)| \quad \forall x_1, x_2 \in B_\epsilon(x) \qquad (1)$$

$$t^{-n} J_L \; \leq \; J_\varphi(\xi) \; \leq \; (2-t)^{-n} J_L \qquad \forall \xi \in B_\epsilon(x) \qquad (2)$$

$$(2-t)^n H^n\left(L(B_\epsilon(x) \cap A)\right) \; \leq \; H^n\left(\varphi(B_\epsilon(x) \cap A)\right) \; \leq \; t^n H^n\left(L(B_\epsilon(x) \cap A)\right) \qquad (3)$$

Per provare (1), fissato $h \in \mathbf{R}^m$ con $|h| = 1$, scriviamo $\quad < \varphi(x_1) - \varphi(x_2), h >=$

$$< L(x_1 - x_2), h > + \int_0^1 < \left[D\varphi(\tau x_1 + (1-\tau)x_2) - L\right](x_1 - x_2), h > d\tau$$

Siano $\sigma(t, x)$, $\epsilon(t, x)$ tali che $\sigma(t, x)\,|\xi| \leq (t-1)\,|L\xi| \quad \forall \xi \in \mathbf{R}^n$ e

$$\left|\int_0^1 [< D\varphi(\tau x_1 + (1-\tau)x_2) - L](x_1 - x_2), h > d\tau\right| \le \sigma(t,x)|x_1 - x_2| \le$$
$\le (t-1)\,|L(x_1) - L(x_2)|$ se $\epsilon \le \epsilon(t,x)$ e $x_1, x_2 \in B_\epsilon(x)$. Allora
$| < \varphi(x_1) - \varphi(x_2), h > | \le t|L(x_1 - x_2)|$ se $|h| = 1$.
Analogamente, $|\varphi(x_1) - \varphi(x_2)| \ge |L(x_1 - x_2)| - \sigma\,|x_1 - x_2| \ge (2-t)\,|L(x_1 - x_2)|$ e la prova di (1) é cosí completa. Per provare (2), basta osservare che

$$J_\varphi(\xi) = (det\,((D\varphi(\xi))' \circ D\varphi(\xi))^{\frac{1}{2}} \to_{\xi\to x} (det\,((D\varphi(x))' \circ D\varphi(x))^{\frac{1}{2}} = J_L$$

Ora, siccome $L : \mathbf{R}^n \to L(\mathbf{R}^n)$ é invertibile, indicato con L^{-1} il suo inverso possiamo scrivere $\varphi(\xi) = (\varphi \circ L^{-1})(L\xi)$. Ma, da (1),

$$|(\varphi \circ L^{-1})(y_1) - (\varphi \circ L^{-1})(y_2)| \le t\,|y_1 - y_2|$$

cioé $\varphi \circ L^{-1}$ é Lip di costante t, e quindi

$$H^n(\varphi(B_\epsilon(x) \cap A)) = H^n((\varphi \circ L^{-1})(L(B_\epsilon(x) \cap A)) \le t^n H^n(L(B_\epsilon(x) \cap A))$$

Analogamente, prendendo $x_i = \varphi^{-1}(y_i)$ in (1), deduciamo che

$$(2-t)\,|L(\varphi^{-1}(y_1) - \varphi^{-1}(y_2))| \le\ |y_1 - y_2|$$

cioé $L \circ \varphi^{-1}$ é lipschitziana di costante $(2-t)^{-1}$, e quindi

$$H^n(L(B_\epsilon(x) \cap A)) = H^n(L \circ \varphi^{-1}(\varphi(B_\epsilon(x) \cap A)) \le (2-t)^{-n} H^n(\varphi(B_\epsilon(x) \cap A))$$

Passo 3: conclusione. Sia $t \in (1,2)$. Dal passo (2) segue che la famiglia $\mathcal{V}$ di palle chiuse $B_\epsilon(x)$, $x \in A$ tali che valgano (1) e (2) e (3) é un ricoprimento di Vitali di A. Supposto dapprima che A sia limitato, sia $B_j \in \mathcal{V}$ famiglia disgiunta tale che $L^n(A \setminus (\cup_j B_j)) = 0$ e quindi $L^n(A) = L^n(\cup_j A \cap B_j)$ e quindi

$$\int_A J_\varphi(x)dx = \sum_j \int_{A\cap B_j} J_\varphi(x)dx$$

Poi, detto x_j il centro di $B_j \in \mathcal{V}$, dalla (3), dalla Prop. 3 e infine dalla (2) segue che

$$t^{-2n} H^n(\varphi(B_j \cap A)) \le t^{-n} H^n(D\varphi(x_j)(B_j \cap A)) = t^{-n} J_\varphi(x_j)\, L^n(B_j \cap A) \le$$

$$\le \int_{A\cap B_j} J_\varphi(x)dx \le$$

$$\le (2-t)^{-n} J_\varphi(x_j) L^n(B_j \cap A) = (2-t)^{-n} H^n(D\varphi(x_j)(B_j \cap A)) \le (2-t)^{-2n} H^n(\varphi(B_j \cap A)$$

Ma $H^n(\varphi(A)) = H^n(\varphi(A \cap [\cup_j B_j]) + H^n(\varphi(A \setminus [\cup B_j])) = H^n(\varphi(A \cap [\cup_j B_j])$, e quindi, sommando in j, troviamo

$$t^{-2n} H^n(\varphi(A)) \leq \int_A J_\varphi(x)dx \leq (2-t)^{-2n} H^n(\varphi(A)) \qquad t \in (1,2)$$

Mandando t a 1^+, troviamo appunto $\quad H^n(\varphi(A)) = \int_A J_\varphi(x)dx$.
Per concludere, posto $A_R := A \cap B_R$, da $\quad H^n(\varphi(A_R)) = \int_{A_R} J_\varphi(x)dx \quad$ si ottiene, mandando R all'infinito, $\quad H^n(\varphi(A)) = \int_A J_\varphi(x)dx$.

Parte II). Intanto, f boreliana, φ continua $\Rightarrow f \circ \varphi$ boreliana. Infatti, indicata con $\mathcal{B}^k$ la classe dei boreliani in $\mathbf{R}^k$ si ha che $\{E \subset \mathbf{R}^m : \quad \varphi^{-1}(E) \in \mathcal{B}^n\}$ é, come si vede facilmente, una σ-algebra che, contenendo gli aperti di $\mathbf{R}^m$, contiene $\mathcal{B}^m$.
Sia $f \geq 0$ borel misurabile, e quindi f si scrive $f = \sum_j \frac{1}{j}\chi_{E_j}$ per certi boreliani E_j. Allora

$$(f \circ \varphi)(x) = \sum_j \frac{\chi_{E_j}(\varphi(x))}{j} = \sum_j \frac{\chi_{\varphi^{-1}(E_j)}(x)}{j} \quad \Rightarrow \quad \int_A (f \circ \varphi)(x) J_\varphi(x)dx =$$

$$\sum_j \frac{1}{j} \int \chi_{A \cap \varphi^{-1}(E_j)} J_\varphi \;=\; \sum_j \frac{1}{j} H^n(\varphi(A) \cap E_j) \;=\; \int_{\varphi(A)} \sum_j \frac{1}{j} \chi E_j dH^n \;=\; \int_{\varphi(A)} f dH^n$$

Scrivendo $f = f^+ - f^-$ si deduce il risultato per f.

NOTA. Usando un teorema (di Rademacher) che assicura che le funzioni Lipschitziane sono differenziabili q.o. e raffinando gli argomenti sopra utilizzati si puó provare (vedi Evans-Gariepy) che la formula di area continua vale in sole ipotesi di Lipscitzianitá e di iniettivitá. Si puó addirittura eliminare l'ipotesi di iniettivitá, purché l'area di $\varphi(A)$ venga calcolata tenendo conto delle eventuali sovrapposizioni.

ESEMPI.

1. Sia $\gamma \in C^1(\mathbf{R}, \mathbf{R}^n)$ curva parametrica in $\mathbf{R}^n$, cioé γ é iniettiva e $J_\gamma = \|\dot\gamma(t)\| > 0 \forall t$. Sia $f : \mathbf{R}^n \to [-\infty, +\infty]$ borel misurabile. Allora, se $A \subset \mathbf{R}$ é misurabile,

$$\int_{\gamma(A)} f dH^1 = \int_A f(\gamma(t)) \|\dot\gamma(t)\| dt$$

é l'integrale di f sulla 'curva' $\gamma(A)$.

2. Sia $X \in C^1(\mathbf{R}^2, \mathbf{R}^3)$, $\quad X(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$ $\quad$ 'superfice parametrica' in $\mathbf{R}^3$, cioé X é iniettiva e $J_X(u,v) > 0$ per ogni (u,v).
I vettori $X_u = (x_u, y_u, z_u)$ e $X_v = (x_v, y_v, z_v)$ generano lo spazio tangente alla superfice nel punto $X(u,v)$. La normale alla superfice é data dal vettore $\frac{X_u \wedge X_v}{\|X_u \wedge X_v\|}$ ove $X_u \wedge X_v = (y_u z_v - z_u y_v, -(x_u z_v - z_u x_v), x_u y_v - x_u y_v)$. Quindi $\|X_u \wedge X_v\| = J_X$ cioé la lunghezza di $X_u \wedge X_v$ uguaglia l'area del parallelogramma generato da X_u, X_v: $\|X_u \wedge X_v\| du\, dv$ é l'elemento d'area sulla superfice. Per la formula di area, se A é un sottoinsieme misurabile di Ω allora

$$\int_A \|X_u \wedge X_v\| du\, dv = H^2(X(A))$$

é l'area della porzione di 'superfice' $X(A)$.

3. Se M é n-varietá immersa in $\mathbf{R}^m$ e $\varphi : \Omega \to \mathbf{R}^m$, Ω aperto in $\mathbf{R}^n$ é una carta locale per M, allora $J_\varphi(x) dx_1 \dots dx_n$ é, in coordinate locali, 'elemento di volume' della superfice. É

$$[D\varphi(x)]' \circ D\varphi(x) = (g_{ij}), \qquad = g_{ij} =< \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} >, \quad i,j = 1, \dots, n$$

Se $g := det\,(g_{ij})$ e quindi $J_\varphi(x) = det([D\varphi(x)]' \circ D\varphi(x))^{\frac{1}{2}} = g^{\frac{1}{2}}$, ed $E \subset \varphi(\mathbf{R}^n)$ é boreliano, allora

$$H^n(E) = vol(E) = \int_{\varphi^{-1}(E)} g^{\frac{1}{2}} dx$$

4. Sia $\varphi \in C^1(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n)$, iniettiva e tale che $J_\varphi(x) = \left| det \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}(x) \right)_{i,j=1,\dots,n} \right| > 0$ per ogni x. Sia f sommabile, A misurabile. Allora

$$\int_A f(\varphi(x)) \left| det \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) \right| dx = \int_{\varphi(A)} f dy$$

LA FORMULA DI COAREA.

Sia $f \in C^1(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$ con $n > m$. In tal caso hanno rilevanza geometrica gli insiemi di livello $f^{-1}(y)$, $y \in \mathbf{R}^m$ ed il modo in cui fogliano un dato insieme A: $A = \cup_y [A \cap \{f = y\}]$. Ricordiamo che $f^{-1}(y)$ é varietá di dimensione $n - m$ se nei suoi punti la matrice Jacobiana $\frac{\partial f}{\partial x} = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right)_{i=1,\dots,m,\, j=1,\dots,n}$ ha rango massimo (Teorema del Dini).
Se $m = 1$, $\frac{\partial f}{\partial x} = \nabla f(x)$ e un insieme di livello $f^{-1}(t)$, $t \in \mathbf{R}$, é 'ipersuperfice' se $|\nabla f(x)| \neq 0 \quad \forall x \in f^{-1}(t)$. Dato $A \subset \mathbf{R}^n$, risulta ovviamente $A = \cup_t \{f = t\}$.

Nel caso lineare, cioé $f(x) =< h, x >$ e quindi $\nabla f(x) \equiv h$, gli insiemi di livello sono iperpiani affini $\{x :< x, h >= t\}$ ortogonali alla retta $\mathbf{R}h$. Se $|h| = 1$, il Teorema di Fubini dá

$$\int_{\mathbf{R}} H^{n-1}(A \cap \{< h, x >= t\})dt = L^n(A)$$

Se $|h| \neq 1$ ed effettuando il cambio di variabile $\frac{t}{|h|} = s$ troviamo

$$\int\limits_{\mathbf{R}} H^{n-1}(A \cap \{< h, x >= t\})dt = |h| \int_{\mathbf{R}} H^{n-1}(A \cap \{< \frac{h}{|h|}, x >= s\})ds = |h| L^n(A)$$

che possiamo anche scrivere come

$$\int\limits_A |\nabla f(x)| dx = \int_{\mathbf{R}} H^{n-1}(A \cap \{f = t\})dt$$

Notiamo che $|\nabla f| = [det\,(Df \circ (Df)')]^{\frac{1}{2}}$. Vediamo quindi che, di nuovo, un oggetto analiticamente rilevante é dato da

$$J_f(x) := J_{(Df)'} \ = \ [det\,(Df(x) \circ (Df(x))')]^{\frac{1}{2}}$$

(nota che $det\,([Df(x)]' \circ Df(x)) \equiv 0$) e dal suo integrale su A. Si ha in effetti

Teorema (formula di coarea).

Sia $n \geq m$. Sia $f \in C^1(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$. Sia $A \subset \mathbf{R}^n$ misurabile. Allora

$$\int\limits_A J_f(x)dx \ = \int\limits_{\mathbf{R}^m} H^{n-m}(A \cap \{f = y\})dy = \int\limits_{\mathbf{R}^m} \left[\int\limits_{\{f=y\}} \chi_A dH^{n-m} \right] dy$$

Se poi g é sommabile in $\mathbf{R}^n$, allora

$$\int\limits_A g(x)\ J_f(x)dx \ = \int\limits_{\mathbf{R}^m} \left[\int\limits_{\{f=y\}} g\, dH^{n-m} \right] dy$$

ESEMPIO (integrazione in coordinate polari). Sia $g : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ sommabile. Allora

$$\int\limits_{\mathbf{R}^n} g\, dx \ = \int\limits_0^\infty \left(\int\limits_{|x|=r} g\, dH^{n-1} \right) dr$$

Basta applicare la formula di coarea con $f(x) = \frac{x}{|x|}$, giacché $J_f(x) = 1$ per ogni $x \neq 0$.

AM5: Tracce delle lezioni- 12

SPAZI DI SOBOLEV

Abbiamo visto che

$$\int\limits_{\mathbf{R}^N} \frac{\partial u}{\partial x_j}\ v \ = \ -\int\limits_{\mathbf{R}^N} u\ \frac{\partial v}{\partial x_j} \qquad\qquad \forall u \in C^1, \quad \forall v \in C_0^\infty(\mathbf{R}^N)$$

Derivate deboli, lo spazio H^1_{loc}. Se $u \in L^1_{loc}(\mathbf{R}^N)$ (i.e. $\int\limits_{B_R} |u| < +\infty \ \forall R$) e

$$\exists \quad u_j \in L^1_{loc}(\mathbf{R}^N): \qquad \int\limits_{\mathbf{R}^N} u_j\ v \ = \ -\int\limits_{\mathbf{R}^N} u\ \frac{\partial v}{\partial x_j} \qquad\qquad \forall v \in C_0^\infty(\mathbf{R}^N)$$

diremo che u_j é la derivata debole di u rispetto alla j-esima variabile e scriveremo $\frac{\partial u}{\partial x_j} \ = \ u_j,\ \ \nabla u := (\frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots,\ \frac{\partial u}{\partial x_N})$. Diremo anche che $u \in H^1_{loc}(\mathbf{R}^N)$.

Proposizione 1 (unicitá della derivata debole, regolarizzazione).

(i) $u_j, v_j \in L^1_{loc}(\mathbf{R}^N),\ \int\limits_{\mathbf{R}^N} u_j\ v \ = \ -\int\limits_{\mathbf{R}^N} u\ \frac{\partial v}{\partial x_j} \ = \ \int\limits_{\mathbf{R}^N} v_j\ v \quad \forall v \in C_0^\infty(\mathbf{R}^N) \ \Rightarrow$ $u_j \ = \ v_j$. In particolare, ogni funzione C^1 ha derivate deboli e queste coincidono con le derivate usuali.

(ii) $\quad \varphi \in C_0^\infty,\ u \in H^1_{loc} \ \Rightarrow \ \varphi * u \in C^\infty \quad$ e $\quad \frac{\partial}{\partial x_j}(\varphi * u) \ = \ \varphi * \frac{\partial u}{\partial x_j}$

(iii) Se $u \in H^1_{loc}(\mathbf{R}^N)$ e $v \in C_0^\infty(\mathbf{R}^N)$ allora $uv \in H^1_{loc}(\mathbf{R}^N)$ e $\frac{\partial uv}{\partial x_j} \ = \ \frac{\partial u}{\partial x_j}\, v + u \frac{\partial v}{\partial x_j}$

Prova di (ii). $\quad u \in L^1_{loc} \ \Rightarrow \ \varphi * u \in C^\infty \quad$ e $\quad \frac{\partial}{\partial x_j}(\varphi * u) \ =$

$$\int\limits_{\mathbf{R}^N} \frac{\partial}{\partial x_j}\varphi(x-y)\, u(y)\, dy = -\int\limits_{\mathbf{R}^N} \frac{\partial}{\partial y_j}\varphi(x-y)\, u(y)\, dy = \int\limits_{\mathbf{R}^N} \frac{\partial u}{\partial y_j}\varphi(x-y)\, dy = \varphi * \frac{\partial u}{\partial x_j}$$

Prova di (iii). $-\int\limits_{\mathbf{R}^N} \frac{\partial u}{\partial x_j} v\varphi = \int\limits_{\mathbf{R}^N} u \left[v\frac{\partial \varphi}{\partial x_j} + \varphi\frac{\partial v}{\partial x_j}\right] \Rightarrow \int\limits_{\mathbf{R}^N} uv\frac{\partial \varphi}{\partial x_j} = -\int\limits_{\mathbf{R}^N} \varphi\left[u\frac{\partial v}{\partial x_j} + v\frac{\partial u}{\partial x_j}\right]$ per ogni $\varphi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^N)$.

Definizione di $\quad H^{1,p}(\mathbf{R}^N)$**,** $\mathcal{D}^1(\mathbf{R}^N)$. $\quad$ Sia $N, p \geq 1$. $H^{1,p}(\mathbf{R}^N)$ é lo spazio delle funzioni L^p con derivate deboli in L^p, dotato della norma

$$\|u\|_{1,p}^p \ = \int\limits_{\mathbf{R}^N} |u|^p \ + \ |\nabla u|^p$$

La norma in $H^1(\mathbf{R}^N) := H^{1,2}(\mathbf{R}^N)$ deriva dal prodotto scalare

$$< u, v > = \int_{\mathbf{R}^N} < \nabla u, \nabla v > + u\, v$$

Sia $N \geq 3$. $\mathcal{D}^1(\mathbf{R}^N)$ é lo spazio delle funzioni in $L^{\frac{2N}{N-2}}$ con derivate deboli in L^2, dotato del prodotto scalare e relativa (semi)norma

$$< u, v >_{\mathcal{D}^1} = \int_{\mathbf{R}^N} < \nabla u, \nabla v > \qquad\qquad \|u\|^2_{\mathcal{D}^1} = \int_{\mathbf{R}^N} |\nabla u|^2$$

Proposizione 2 : C_0^∞ **é denso in** $H^{1,p}$ **e in** $\mathcal{D}^1$.

Prova. (i) $\forall u \in H^{1,p},\ \exists u_n \in C_0^\infty(\mathbf{R}^N):\quad u_n \to u, \quad \partial_j u_n \to \partial_j u \quad \text{in} \quad L^p$. Infatti, sia $\psi_R(x) := \psi(\frac{x}{R})$, $\psi \in C_0^\infty(B_2)$, $0 \leq \varphi \leq 1$, $\psi \equiv 1$ in B_1 e $\varphi \in C_0^\infty$ nucleo regolarizzante. Posto $u_R := u\, \psi_R$, risulta

$$\varphi_\epsilon * u_R \in C_0^\infty, \quad \varphi_\epsilon * u_R \to_\epsilon u_R \quad \text{in} \quad L^p$$

$$\partial_j(\varphi_\epsilon * u_R\,) = \varphi_\epsilon * (\partial_j u_R) \in C_0^\infty, \quad \varphi_\epsilon * (\partial_j u_R) \to_\epsilon \partial_j u_R \quad \text{in} \quad L^p$$

Basta quindi provare che $u\, \psi_R \to_R u$ in $H^{1,p}$, ed infatti

$$\int |u - u\psi_R|^p + |\nabla(u - u\psi_R)|^p \leq \int_{|x|\geq R} |u|^p + |\nabla u|^p + |u|^p \left(\frac{1}{R}|\nabla\psi(\frac{x}{R})|\right)^p \to_{R\to+\infty} 0$$

(ii) $\forall u \in \mathcal{D}^1,\ \exists u_n \in C_0^\infty(\mathbf{R}^N):\ u_n \to u \ \text{ in } \ L^{\frac{2N}{N-2}}, \quad \partial_j u_n \to \partial_j u \quad \text{in} \quad L^2$.
Qui, $\varphi_\epsilon * u_R \to_\epsilon u_R$ in $L^{\frac{2N}{N-2}}$, $\partial_j(\varphi_\epsilon * u_R) = \varphi_\epsilon * (\partial_j u_R) \to \partial_j u_R$ in L^2. Come in (i), $u_R \to_{R\to\infty} u$ in $L^{\frac{2N}{N-2}}$, $\psi_R \partial_j u \to_{R\to\infty} \partial_j u$ in L^2 mentre

$$\int |u\,(\partial_j\psi_R)|^2 \leq \frac{1}{R^2}\int_{R\leq|x|} u^2\ |\partial_j\varphi|^2(\frac{x}{R}) \leq \frac{1}{R^2}\left(\int_{R\leq|x|} |u|^{\frac{2N}{N-2}}\right)^{\frac{N-2}{N}} \left(\int |\partial_j\psi|^N(\frac{x}{R})\right)^{\frac{2}{N}}$$

$$\leq \left(\int_{R\leq|x|} |u|^{\frac{2N}{N-2}}\right)^{\frac{N-2}{N}} (\left(\int |\partial_j\varphi|^N\right)^{\frac{2}{N}} \to_{R\to\infty} 0$$

Corollario 1 $\quad u,\ v \in \mathcal{D}^1 \quad \Rightarrow \quad \int_{\mathbf{R}^N} \frac{\partial u}{\partial x_j}\ v = -\int_{\mathbf{R}^N} u\ \frac{\partial v}{\partial x_j}$

Corollario 2 **(Diseguaglianza di Sobolev in $\mathcal{D}^1$)**

$$\left(\int_{\mathbf{R}^N} |u|^{\frac{2N}{N-2}}\right)^{\frac{N-2}{N}} \leq c(N) \int_{\mathbf{R}^N} |\nabla u|^2 \quad \forall u \in \mathcal{D}^1$$

Segue da: $u \in \mathcal{D}^1 \Rightarrow \exists\, u_n \in C_0^\infty$ tale che $u_n \to u$ in $L^{\frac{2N}{N-2}}$, $\nabla u_n \to \nabla u$ in L^2 e

$$\left(\int_{\mathbf{R}^N} |u_n|^{\frac{2N}{N-2}}\right)^{\frac{N-2}{N}} \leq c(N) \int_{\mathbf{R}^N} |\nabla u_n|^2$$

NOTA. Vediamo in particolare che $(\int |\nabla u|^2)^{\frac{1}{2}}$ é una norma in $\mathcal{D}^1$.

Corollario 3 $H^1(\mathbf{R}^N) \subset \mathcal{D}^{\,1}(\mathbf{R}^N) \quad \forall N \geq 3.$ In particolare

$$\forall p \in [2, \frac{2N}{N-2}], \quad \exists c(p,N): \qquad \|u\|_{L^p} \leq c(p,N)\|u\|_{H^1} \qquad \forall u \in H^1$$

Infatti, se $u_n \in C_0^\infty$, $u_n \to u$ in L^2 e q.o. e $\nabla u_n \to \nabla u$ in L^2, allora

$$\left(\int_{\mathbf{R}^N} |u|^{\frac{2N}{N-2}}\right)^{\frac{N-2}{N}} \leq \underline{\lim}_n \left(\int_{\mathbf{R}^N} |u_n|^{\frac{2N}{N-2}}\right)^{\frac{N-2}{N}} \leq \underline{\lim}_n\, c \int_{\mathbf{R}^N} |\nabla u_n|^2 = c \int_{\mathbf{R}^N} |\nabla u|^2$$

Quindi, da $\int |u|^2 \leq \|u\|^2_{H^1}$, si ottiene, per interpolazione, la stima per $\|u\|_{L^p}$.

NOTA $H^1 \subset \mathcal{D}^1$, inclusione stretta. Un esempio:
$U(x) = (1+|x|^2)^{-\frac{N-2}{2}}$, $N \geq 3$. É $U \in L^{\frac{2N}{N-2}}$, $|\nabla U|^2 = (N-2)^2 \frac{|x|^2}{(1+|x|^2)^N}$ e quindi $|\nabla U| \in L^2$, mentre $\int U^2 = \int \frac{1}{(1+|x|^2)^{N-2}} < +\infty \Leftrightarrow N > 4$

Proposizione 3. **H^1 e $\mathcal{D}^1$ sono spazi di Hilbert**

H^1 é completo: Sia u_n di Cauchy in H^1, ovvero u_n, $\partial_j u_n$ sono di Cauchy in L^2. Dunque esistono $u \in L^2$, $u_j \in L^2$ tali che $u_n \to u$ in L^2, $\partial_j u_n \to u_j$ in L^2. Ma

$$\int u \ \partial_j \varphi = \lim_n \int u_n \ \partial_j \varphi = -\lim_n \int \varphi \ \partial_j u_n = -\int \varphi \ v_j$$

Dunque u ha derivate deboli in L^2 date da $\partial_j u = u_j$, ovvero $u \in H^1$.
$\mathcal{D}^1$ é completo. Se infatti u_n é di Cauchy in $\mathcal{D}^1$, ovvero $\partial_j u_n$ sono di Cauchy in L^2, per la diseguaglianza di Sobolev u_n é di Cauchy in $L^{\frac{2N}{N-2}}$. Dunque esistono $u \in L^{\frac{2N}{N-2}}$, $u_j \in L^2$ tali che $u_n \to u$ in $L^{\frac{2N}{N-2}}$, $\partial_j u_n \to u_j$ in L^2

Definizione di $H^{m,p}(\mathbf{R}^N)$. Siano $p \geq 1$, $m \in \mathbf{N}$, $u \in L^p(\mathbf{R}^N)$.

Diremo che u sta in $H^{1,p}(\mathbf{R}^N)$ se ha derivate (prime) deboli in L^p.
Diremo che u sta in $H^{2,p}(\mathbf{R}^N)$ se ha derivate (prime) deboli in $H^{1,p}(\mathbf{R}^N)$, e cosí via. Posto, per un multiindice $\alpha := (\alpha_1, \dots, \alpha_N) \in \mathbf{N}^N$

$$|\alpha| := \sum_j \alpha_j, \quad D^\alpha \varphi = \frac{\partial^{|\alpha|}\varphi}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_N^{\alpha_N}}, \qquad \text{scriveremo} \qquad u \in H^{m,p}(\mathbf{R}^N) \Leftrightarrow$$

$$\forall \alpha \;\; t.\ c.\ |\alpha| \leq m, \quad \exists u_\alpha \in L^p : \qquad \int_{\mathbf{R}^N} u_\alpha\, \varphi = (-1)^{|\alpha|} \int_{\mathbf{R}^N} u\, D^\alpha \varphi \quad \forall \varphi \in C_0^\infty$$

Diremo che $D^\alpha u := u_\alpha$ é la derivata α-esima debole di u. $H^{m,p}(\mathbf{R}^N)$ con la norma

$$\|u\|_{m,p}^2 := \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_p^2$$

é spazio di Banach e ha $C_0^\infty(\mathbf{R}^N)$ come sottospazio denso.

Le diseguaglianza di Sobolev e di Morrey si estendono per densitá agli $H^{1,p}(\mathbf{R}^N)$:

$$\forall p \in [1, N), \quad H^{1,p}(\mathbf{R}^N) \subset L^q \qquad \forall q \in [p, \frac{Np}{N-p}] \qquad \text{con immersione continua,}$$

$$\forall p > N, \quad \exists c = c(p, N) : \quad \|u\|_\infty \leq c\|\nabla u\|_p, \quad |u(x) - u(y)| \leq c|x-y|^{1-\frac{N}{p}} \quad \forall u \in H^{1,p}$$

e, iterando, si vede che se $u \in H^{m,p}$ allora

$$mp < N \quad \Rightarrow \quad u \in L^q \quad \forall q \in [p, \tfrac{Np}{N-mp}], \qquad mp = N \quad \Rightarrow \quad u \in L^q \quad \forall q \geq p$$

$mp > N \quad \Rightarrow \quad u$ é holderiana. Ad esempio, se $u \in H^{2,p}$, allora

$p < N \quad \Rightarrow \quad \partial_j u \in H^{1,p} \subset L^{\frac{Np}{N-p}} \quad \Rightarrow \quad u$ é limitata ed holderiana

$p > N \quad \Rightarrow \quad \partial_j u \in H^{1,p} \quad \Rightarrow \quad \partial_j u$ sono limitate ed holderiane

Infine, $u \in H^{m,2} \quad \forall m \; \Rightarrow \; u \in C^\infty$. Infatti, se $m \leq \frac{N}{2} < m+1$ allora

$$u \in H^{m+1,2} \quad \Rightarrow \quad Du \in H^{m,2} \quad \Rightarrow \quad Du \in L^{\frac{2N}{N-2m}}$$

se $m < \frac{N}{2}$ e $Du \in L^p$ per ogni p se $m = \frac{N}{2}$. Ed allora, da $\frac{N}{2} < m+1$ segue che $u \in H^{1,p}$ con $p > N$ e dunque u é holderiana. Siccome, per ogni α, $D^\alpha u \in H^{m,2}$ per ogni m, concludiamo che $D^\alpha u$ é continua per ogni α.

SOLUZIONI DEBOLI DELL'EQUAZIONE DI POISSON in $\mathbf{R}^N$

Sia $\quad \Delta = \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$. $\quad$ Se , data f, $\quad u \in C^2(\mathbf{R}^N)$ é soluzione di

(equazione di Poisson) $\qquad -\Delta u = f \quad \text{in} \quad \mathbf{R}^N$

allora, moltiplicando l'equazione per $\varphi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^N)$ ed integrando per parti, si ha

$$(\star) \qquad \int \nabla u \, \nabla \varphi \; = \int f \, \varphi \qquad \forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^N)$$

$$(\star\star) \qquad -\int u \, \Delta \varphi \; = \int f \, \varphi \qquad \forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^N)$$

Viceversa, se $u \in C^2(\mathbf{R}^N)$ e vale $(\star\star)$, allora u é soluzione dell'equazione di Poisson. Diremo che u é soluzione debole (molto debole) dell'equazione di Poisson se $u \in H^1_{loc}$ e soddisfa $(\star)$ (rispet.,$u \in L^1_{loc}$ e soddisfa $(\star\star)$).

TEOREMA 1. $\quad$ Sia $N \geq 3$.

$$\forall f \in L^{\frac{2N}{N+2}}, \quad \exists \, ! \, u_f \in \mathcal{D}^1 : \quad \int \nabla u_f \, \nabla \varphi \; = \int f \, \varphi \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^N)$$

e (dipendenza continua dal dato) $\qquad (\int |\nabla u_f|^2)^{\frac{1}{2}} \leq c(N) \|f\|_{\frac{2N}{N+2}}$

Prima Prova. $\quad$ Per le diseguaglianze di Holder e di Sobolev

$$|\int f \, v| \leq \|f\|_{L^{\frac{2N}{N+2}}} \; \|v\|_{L^{\frac{2N}{N-2}}} \; \leq \; c(N) \, \|f\|_{L^{\frac{2N}{N+2}}} \; \|v\|_{\mathcal{D}^1} \quad \forall v \in \mathcal{D}^1$$

e cioé $\quad v \to \int f \, v \quad$ é un funzionale lineare e continuo su $\mathcal{D}^1$ e quindi, per il Teorema di rappresentazione di Riesz,

$$\exists u \in \mathcal{D}^1 : \quad \int f \, v \; = < u, v >_{\mathcal{D}^1} = \int \nabla u \, \nabla v \quad \forall v \in \mathcal{D}^1$$

ovvero u é soluzione debole dell'equazione di Poisson con dato f.
Per densitá, in $(\star)$ possiamo prendere $\varphi = u$, e quindi, usando Holder e Sobolev,

$$\int |\nabla u|^2 = \int u f \leq \|f\|_{\frac{2N}{N+2}} \, \|u\|_{\frac{2N}{N-2}} \leq c \, \|f\|_{\frac{2N}{N+2}} \, (\int |\nabla u|^2)^{\frac{1}{2}} \qquad \text{e quindi}$$

$\|\nabla u\|_2 \leq c \|f\|_{\frac{2N}{N+2}}$. $\qquad$ Ció implica in particolare l'unicitá della soluzione.

Seconda Prova. $\quad$ Sia $\quad E(u) = \frac{1}{2} \int |\nabla u|^2 - \int f \, u, \quad u \in \mathcal{D}^1$. $\quad$ Si ha

$$E(u) \geq \frac{1}{2} \|\nabla u\|_2^2 - c(N) \|f\|_{\frac{2N}{N+2}} \, \|\nabla u\|_2 \to_{\|\nabla u\|_2 \to +\infty} +\infty \quad \Rightarrow \quad \inf_u E(u) > -\infty$$

e quindi $\qquad E(u_n) \to_n \inf_u E(u) \quad \Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad \sup_n \|\nabla u_n\|_2 < +\infty \quad \Rightarrow \quad \exists \underline{u}, \quad \exists n_k : \quad u_{n_k} \rightharpoonup_k \underline{u} \quad \text{in} \quad \mathcal{D}^1.$$

Siccome la norma é debolmente inferiormente semicontinua, risulterá $\quad E(\underline{u}) = \inf E \quad$ e quindi

$$0 = \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}\int |\nabla(\underline{u} + t\varphi)|^2 - \int f\,(\underline{u} + t\varphi)\right]_{|t=0} = \int \nabla u\, \nabla\varphi - \int h\varphi \quad \forall\varphi \in C_0^\infty$$

ovvero $\underline{u}$ é soluzione debole.

Rappresentazione integrale della soluzione e regolaritá

Sia $N \geq 3$, $p > 1$, $f \in L^p(\mathbf{R}^N)$, $f \equiv 0$ fuori di B_R, $c(N) := N(N-2) \int \frac{d\xi}{(1+|\xi|^2)^{\frac{N+2}{2}}}$.
Allora, $\quad f * \mathcal{N}$, $\mathcal{N} = \frac{G_{N-2}}{c(N)} \quad$ é soluzione debole dell'eq. di Poisson.

Infatti, sia $f_n \in C_0^\infty(\mathbf{R}^N)$, $f_n \to_n f$ in L^r per ogni $r \in (1,p])$, per cui, per (HLS),

$$\|f_n * \mathcal{N} \; - \; f * \mathcal{N}\|_{\frac{Nr}{N-2r}} \to_n 0$$

con $r = p$ se $p < \frac{N}{2}$ ed $r < \frac{N}{2}$ se $p \geq \frac{N}{2}$. Da $\quad -\Delta(f_n * \mathcal{N}) = f_n$ segue allora

$$-\int [f * \mathcal{N}]\ \Delta\varphi = -\lim_n \int [f_n * \mathcal{N}]\ \Delta\varphi = \lim_n \int f_n\varphi = \int f\,\varphi \quad \forall\varphi \in C_0^\infty$$

Osserviamo ora che, se $\quad -\int u\,\Delta\varphi = \int f\,\varphi, \quad \forall\varphi \in C_0^\infty(B_R) \quad$ allora

$$-\int [u - f * \mathcal{N}]\ \Delta\varphi = 0 \qquad \forall\varphi \in C_0^\infty(B_R)$$

(si dice che $u - f * \mathcal{N}$ é 'debolmente armonica' in B_R). Ed allora u ha la stessa regolaritá di $f * \mathcal{N}$, in virtú del

Lemma di Weil. $\quad$ Siano $\quad u, h \in L^1_{loc}(\Omega) \quad$ tali che

$$-\int_\Omega u\,\Delta\varphi \quad = \quad \int_\Omega h\,\varphi \qquad \forall\varphi \in C_0^\infty(\Omega). \qquad \text{Allora}$$

$$h \in C^\infty(\Omega) \qquad \Rightarrow \qquad u \in C^\infty(\Omega)$$

Lemma (Regolaritá di $f * \mathcal{N}$). Sia $p > 1$, $f \in L^p$, a supporto compatto. Allora

(i) $f * \mathcal{N} \in H^1_{loc}$ e $\partial_j (f * G_{N-2}) = -(N-2) \int \frac{f(y)(x_j - y_j) dy}{|x-y|^N}$

(ii) $p < \frac{N}{2} \Rightarrow f * \mathcal{N} \in L^q \quad \forall q \in [1, \frac{Np}{N-2p}], \quad p = \frac{N}{2} \Rightarrow f * \mathcal{N} \in L^q \quad \forall q$

(iii) $\frac{N}{2} < p \le N \Rightarrow f * \mathcal{N}$ é Holderiana di esponente $\alpha < 2 - \frac{N}{p}$

(iv) $N < p \Rightarrow f * \mathcal{N}$ ha derivate Holderiane di esponente $\alpha < 1 - \frac{N}{p}$

(v) Se f ha derivate k-esime Holderiane di esponente α, allora $f * \mathcal{N}$ é di classe C^{k+2} e le sue derivate di ordine k+2 sono holderiane.

Prova di (i). Sia dapprima $f \in C_0^\infty(\mathbf{R}^N)$. Dunque, se $|x| \le r$, esiste $R > 0$:

$|\frac{f(x-z)}{|z|^{N-1}}| \le \frac{\|f\|_\infty \, \chi_{B_R}(z)}{|z|^{N-1}}$ e $|\frac{\partial f}{\partial x_j}(x-z) \frac{1}{|z|^{N-2}}| \le \frac{\|\frac{\partial f}{\partial x_j}\|_\infty \, \chi_{B_R}(z)}{|z|^{N-2}}$. Quindi

$$\frac{\partial}{\partial x_j}(f * G_{N-2}) = \int \frac{\partial f}{\partial x_j}(x-z) \frac{dz}{|z|^{N-2}} = -\lim_{\epsilon \to 0} \int \frac{\partial f}{\partial z_j}(x-z) \frac{dz}{(\epsilon^2 + |z|^2)^{\frac{N-2}{2}}} =$$

$$\lim_{\epsilon \to 0} \int f(x-z) \frac{-(N-2) z_j}{(\epsilon^2 + |z|^2)^{\frac{N}{2}}} \, dz = -(N-2) \int \frac{f(y)(x_j - y_j) dy}{|x-y|^N}$$

D'altra parte, se $f_n \in C_0^\infty, \quad \|f_n - f\|_p \to_n 0$, usando (HLS) vediamo che

$$\| \int \frac{[f_n(y) - f(y)](x_j - y_j) dy}{|x-y|^N} \|_{\frac{Nr}{N-r}} \le c \, \|f_n - f\|_p \to_n 0 \qquad \forall r < min\{p, N\}$$

Quindi $\quad - \int (f * \mathcal{N}) \, \partial_j \varphi =$

$$= - \lim_n \int (f_n * \mathcal{N}) \, \partial_j \varphi = \lim_n \int \partial_j (f_n * \mathcal{N}) \, \varphi = \lim_n \int [f_n * \partial_j \mathcal{N}] \, \varphi =$$

$= \int (f * \partial_j \mathcal{N}) \, \varphi$ e quindi $f * \mathcal{N} \in H^1_{loc}$ e $\partial_j (f * \mathcal{N}) = f * \partial_j \mathcal{N}$.

(ii) segue da (HLS): $\quad \|f * G_{N-2}\|_{\frac{Np}{N-2p}} \le c(N,p) \|f\|_p$

(iii) segue da (HLS) e (i) : $\|\frac{\partial}{\partial x_j}(f * G_{N-2})\|_{\frac{Np}{N-p}} \le \|f\|_p$. Siccome $N > p > \frac{N}{2} \Rightarrow \frac{Np}{N-p} > N$, l'Holderianitá di u segue dal Teorema di Morrey.

(iv-v) sono molto piú complicate da ottenere. La loro prova é omessa.

IL PROBLEMA DI DIRICHLET PER L'EQUAZIONE DI LAPLACE

Sia Ω **aperto limitato** in $\mathbf{R}^N$, $g \in C(\mathbf{R}^N)$. Una funzione $u \in C^2(\Omega)$ si dice **armonica** in Ω se $\quad \Delta u(x) = 0 \quad \forall x \in \Omega$

Se di piú $u \in C(\overline{\Omega})$ e $u \equiv g$ su $\partial\Omega$, u si dice **prolungamento armonico** di g in Ω.

Mediante integrazione per parti, si vede che se u é armonica in Ω allora

$$(\star\star) \qquad -\int_\Omega u\,\Delta\varphi = 0 \qquad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$$

Una $u \in L^1_{loc}$ che soddisfi $(\star\star)$ si dice **debolmente armonica** in Ω.
Diremo anche che $u \equiv g$ su $\partial\Omega$ in senso debole se $u = g + v$, ove v si annulla in senso debole su $\partial\Omega$, ovvero $v \in H_0^1(\Omega)$, ove

Definizione di $H_0^1(\Omega)$. $\quad v \in H_0^1(\Omega)$ se

$$\exists \varphi_n \in C_0^\infty(\Omega): \quad \varphi_n \to_n v \quad \text{in} \quad L^2 \quad \text{e} \quad \int_\Omega |\nabla(\varphi_n - \varphi_m)|^2 \to_{n,m\to+\infty} 0$$

Evidentemente, se $v \in H_0^1(\Omega)$ allora v ha derivate deboli in $L^2(\Omega)$, cioé, posto $\frac{\partial v}{\partial x_j} := \lim_n \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_j}$ (in $L^2(\Omega)$), risulta

$$\int \frac{\partial v}{\partial x_j}\,\varphi = -\int v\,\frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \qquad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$$

Si vede facilmente che $H_0^1(\Omega)$ munito del prodotto scalare

$$< u, v > := \int_\Omega uv + \nabla u\,\nabla v$$

é spazio di Hilbert. Enunciamo, senza darne dimostrazione, i fatti seguenti

Lemma. Sia $v \in H_0^1(\Omega)$. Allora

(i) Posto $\overline{v} := v$ in Ω e $\overline{v} := 0$ fuori di Ω, risulta $\overline{v} \in H^1(\mathbf{R}^N)$ e $\frac{\partial \overline{v}}{\partial x_j} = \overline{\frac{\partial v}{\partial x_j}}$.

(ii) Se $v \in C(\overline{\Omega})$ allora $v \equiv 0$ su $\partial\Omega$.

Per densitá (od anche usando la (i) del Lemma), si ottengono subito

Diseguaglianze di Sobolev e di Poincaré. Sia $N \geq 3$. Allora

$$\forall p \in [1, \frac{2N}{N-2}] \qquad \exists c = c(p,\Omega) : \qquad \left(\int_\Omega |v|^p\right)^{\frac{2}{p}} \leq c \int_\Omega |\nabla v|^2 \qquad \forall v \in H_0^1,$$

$$\lambda_1(\Omega) : \inf\{\int_\Omega |\nabla v|^2 : \int_\Omega |v|^2 = 1\} > 0 \qquad \text{(Poincaré)}$$

Poincaré dice in particolare che $\|v\| := \left(\int_\Omega |\nabla v|^2\right)^{\frac{1}{2}}$ é, in H_0^1, una norma equivalente alla norma di H_0^1 sopra definita, e verrá quindi assunta come la norma di H_0^1.

Teorema di Rellich. $v_n \in H_0^1(\Omega)$, $\sup_n \int |\nabla v_n|^2 < +\infty \;\Rightarrow$

$$\exists n_k, \quad \exists v \in H_0^1(\Omega) : \quad \int_\Omega |v_{n_k} - v|^2 \to_k 0, \quad \int \nabla v_{n_k} \nabla w \to \int \nabla v \nabla w \quad \forall w \in H_0^1(\Omega)$$

TEOREMA 3 (esistenza del prolungamento armonico).

Sia $g \in H^1(\mathbf{R}^N)$. Allora esiste $v_g \in H_0^1(\Omega)$ tale che

$$\int_\Omega \nabla(v_g + g)\, \nabla\varphi = 0 \qquad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$$

cioé $u_g := v_g + g$ é prolungamento armonico (debole) di g.

Infatti, $v_n \rightharpoonup v \;\Rightarrow\; \liminf \int |\nabla v_n|^2 \geq \int |\nabla v|^2 \;\Rightarrow\; \exists v_g \in H_0^1(\Omega)$:

$$\int |\nabla(v_g + g)|^2 \leq \int |\nabla(v+g)|^2 \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

Poi, Poincaré e Riesz danno facilmente

TEOREMA 4 (equazione di Poisson con dato al bordo di Dirichlet).

Sia $f \in L^2(\Omega)$. Allora esiste una unica $v_f \in H_0^1(\Omega)$:

$$(D) \quad \int_\Omega \nabla v_f\, \nabla\varphi = \int_\Omega f\, \varphi \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega). \qquad \text{Inoltre} \quad \|\nabla v_f\|_2 \leq c(\Omega)\|f\|_2$$

cioé v_f é l'unica soluzione (debole) dell'equazione di Poisson nulla su $\partial\Omega$.

Risoluzione spettrale del laplaciano.

Il Teorema 4 dice che **l'operatore lineare** L che associa a $f \in L^2(\Omega)$ l'unica soluzione (debole) in $H_0^1(\Omega)$, cioé

$$v = Lf \qquad \Leftrightarrow \qquad \int_\Omega \nabla v \, \nabla\varphi = \int_\Omega f \, \varphi \qquad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega)$$

é continuo.

Per Rellich, L manda $L^2(\Omega)$ in se stesso in modo **compatto** :

$$f_n \in L^2(\Omega), \quad \sup_n \|f_n\|_2 < +\infty, \quad v_n := L(v_n) \ \Rightarrow \ \sup_n \|\nabla v_n\|_2 < +\infty \quad \Rightarrow$$

$$L(f_n) = v_n \qquad \text{ha estratte convergenti in} \quad L^2(\Omega).$$

Inoltre, L **é autoaggiunto** :

$$v := Lf, \ u := Lg \quad \Rightarrow \quad \int_\Omega fLg \ = \ \int_\Omega fu \ = \ \int_\Omega \nabla v \nabla u \ = \ \int_\Omega vg \ = \ \int_\Omega gLf$$

Infine, L é **positivo**:

$$f \neq 0, \ v := Lf \quad \Rightarrow \quad \int_\Omega fLf = \int_\Omega fv = \int_\Omega |\nabla v|^2 > 0$$

La Teoria degli operatori autoaggiunti compatti in un Hilbert assicura che

L **ha una base ortonormale di autofunzioni** $\varphi_j \in L^2(\Omega)$

corrispondente ad una successione di autovalori (positivi) $\mu_j \to_j 0$. Notiamo che

$$\mu_j \, \varphi_j = L\varphi_j \ \Leftrightarrow \ \mu_j \int_\Omega \nabla\varphi_j \, \nabla\varphi = \int_\Omega \varphi_j \, \varphi \ \Leftrightarrow$$

$$-\mu_j \Delta\varphi_j = \varphi_j$$

in senso debole, e quindi (convergenze in L^2 !)

$$f = \sum_j \Big(\int_\Omega f\varphi_j\Big)\varphi_j \qquad \Rightarrow \qquad Lf = \sum_j \mu_j \Big(\int_\Omega f\varphi_j\Big)\varphi_j$$

Appendice: dimostrazione del lemma di Weyl.

Utilizzeremo la semplice ma cruciale

Diseguaglianza di Cacciopoli.

Sia u armonica in Ω, $x_0 \in B_{2r}(x_0) \subset \Omega$. Allora

$$\int\limits_{B_r(x_0)} |\nabla u|^2 \quad \leq \quad \frac{16}{r^2} \int\limits_{B_{2r}(x_0)} |u|^2$$

Prova della diseguaglianza di Cacciopoli.

Sia quindi $\varphi \in C_0^\infty(B_{2r}(x_0))$, $\varphi \equiv 1$ in $B_r(x_0)$, $\|\nabla\varphi\|_\infty \leq \frac{2}{r}$. Allora

$$0 = \int\limits_{B_{2r}(x_0)} \Delta u \ \left(u\varphi^2\right) = - \int\limits_{B_{2r}(x_0)} \nabla u \ \left[\varphi^2 \nabla u + 2u\varphi\, \nabla\varphi\,\right] \quad \Rightarrow$$

$$\int\limits_{B_{2r}(x_0)} \varphi^2 |\nabla u|^2 \quad \leq \quad 2 \left(\int\limits_{B_{2r}(x_0)} \varphi^2 |\nabla u|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int\limits_{B_{2r}(x_0)} |\nabla\varphi|^2 |u|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad \leq$$

$$\epsilon \int\limits_{B_{2r}(x_0)} \varphi^2 |\nabla u|^2 \quad + \quad \frac{1}{\epsilon} \int\limits_{B_{2r}(x_0)} |\nabla\varphi|^2 |u|^2 \qquad \forall \epsilon > 0 \quad \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2} \int\limits_{B_{2r}(x_0)} \varphi^2 |\nabla u|^2 \quad \leq \quad \frac{8}{r^2} \int\limits_{B_{2r}(x_0)} |u|^2 \quad \Rightarrow \quad \int\limits_{B_r(x_0)} |\nabla u|^2 \quad \leq \quad \frac{16}{r^2} \int\limits_{B_{2r}(x_0)} |u|^2$$

Lemma 1. Sia $u \in L^2(\Omega)$ armonica debole. Sia φ nucleo regolarizzante. Allora $u_\epsilon := u * \varphi_\epsilon$ é armonica in Ω.

Infatti, $\psi \in C_0^\infty(\Omega) \ \Rightarrow \ \int\limits_\Omega \psi(x) \Delta_x [u * \varphi_\epsilon] dx = \int\limits_\Omega \psi(x) \left[\int\limits_\Omega u(y)\, \Delta\varphi_\epsilon(x-y)\, dy \right] dx =$

$$\int\limits_\Omega u(y) \left[\int\limits_\Omega \psi(x)\, \Delta\varphi_\epsilon(x-y)\, dx \right] dy = \int\limits_\Omega u(y) \Delta_y \left[\int\limits_\Omega \psi(x)\, \varphi_\epsilon(x-y)\, dx \right] dy = 0$$

perché $\psi * \varphi_\epsilon \in C_0^\infty(\Omega)$ per ϵ piccolo.

Lemma 2 . Sia $u \in L^2_{loc}(\Omega)$ armonica debole. Allora $u \in H^1_{loc}(\Omega)$ e le sue derivate deboli $\frac{\partial u}{\partial x_j}$ sono debolmente armoniche in Ω e

$$\int_{B_r(x_0)} |\nabla u|^2 \quad \leq \quad \frac{16}{r^2} \int_{B_{2r}(x_0)} |u|^2$$

Infatti, se $x_0 \in B_{2r}(x_0) \subset \Omega$, da Cacciopoli, $\int_{B_r(x_0)} |\nabla u_\epsilon|^2 \leq \frac{16}{r^2} \int_{B_{2r}(x_0)} |u_\epsilon|^2$, segue che $\frac{\partial u_\epsilon}{\partial x_j}$ é di Cauchy in $L^2(B_r(x_0))$ (e quindi in $L^2_{loc}(\Omega)$) perché $u_\epsilon \to_{\epsilon \to 0} u$ in $L^2(B_{2r}(x_0))$ e quindi u ha derivate deboli in $L^2_{loc}(\Omega)$. Infine,

$$0 = \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_j} \ \Delta\varphi = -\int_\Omega u \ \ \Delta(\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}) = 0 \qquad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$$

Il Lemma di Weil vale per le armoniche deboli :

Ogni $u \in L^2_{loc}(\Omega)$, armonica debole in Ω, é $C^\infty(\Omega)$.

Iterando il Lemma 2 otteniamo che $D^\alpha u$ ed é debolmente armonica in Ω e, se $x_0 \in B_r(x_0) \subset \Omega$, $|\alpha| \leq m$ esiste r_m tale che

$$\int_{B_{r_m}(x_0)} |\nabla D^\alpha u|^2 \quad \leq \quad c_m \int_{B_r(x_0)} |u|^2$$

Sia ora $\psi \in C_0^\infty(B_{r_m}(x_0))$, $\psi \equiv 1$ in $B_{\frac{r_m}{2}}(x_0)$. É facile vedere che allora ψu ($\psi u \equiv 0$ fuori di $B_{r_m}(x_0)$) ha derivate deboli fino all' ordine m in $L^2(\mathbf{R}^N)$ e quindi, se $m > \frac{N}{2}$, ψu é continua e quindi u é continua in $B_{\frac{r_m}{2}}(x_0)$ e quindi, per l'arbitrarietá di x_0, u é continua in Ω. Siccome $D^\alpha u$ é debolmente armonica in Ω, concludiamo che $D^\alpha u$ é continua in Ω per ogni α e quindi $u \in C^\infty(\Omega)$.

Prova del Lemma di Weil .

Ci limitiamo al caso in cui $u \in L^2_{loc}(\Omega)$. Ricordiamo che, se $\overline{f}$ é f prolungata a zero fuori di $B_{2r}(x_0) \subset \Omega$, allora $u_f := \frac{1}{c_N}\overline{f} * G_{N-2} \in C^\infty$ é tale che $-\Delta u_f = \overline{f}$ in $\mathbf{R}^N$ e quindi

$$\int (u - u_f)\Delta\varphi = 0 \qquad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$$

Dunque $u = (u - u_f) + u_f \in C^\infty$.

Problemi e complementi XI Settimana

Esercizio 1. Sia $h \in L^{\frac{2N}{N+2}}$. Provare che

$$h * G_{N-2} \in \mathcal{D}^1 \quad \text{e} \quad \partial_j \int \frac{h(y)dy}{|x-y|^{N-2}} = -(N-2)\int \frac{h(y)(x_j-y_j)dy}{|x-y|^N}$$

SOLUZIONE

In primo luogo, da (HLS) segue: $\|h * G_{N-2}\|_{\frac{2N}{N-2}} \le d(N)\|h\|_{\frac{2N}{N+2}}$.
Poi, se $h \in C_0^\infty(B_R)$,

$$|\frac{\partial h}{\partial x_j}(x-z)\frac{1}{|z|^{N-2}}| \le \|\frac{\partial h}{\partial x_j}\|_\infty \frac{1}{|z|^{N-2}}\chi_{B_R} \;\Rightarrow\; \frac{\partial}{\partial x_j}(h*G_{N-2}) = \int \frac{\partial h}{\partial x_j}(x-z)\frac{dz}{|z|^{N-2}}$$

$$= \lim_{\epsilon\to 0}\int \frac{\partial h}{\partial x_j}(x-z)\frac{dz}{(\epsilon^2+|z|^2)^{\frac{N-2}{2}}} = \lim_{\epsilon\to 0}\int \frac{\partial h}{\partial x_j}(y)\frac{dy}{(\epsilon^2+|x-y|^2)^{\frac{N-2}{2}}} =$$

$$-\lim_{\epsilon\to 0}\int h(y)\frac{-(N-2)(x_j-y_j)}{(\epsilon^2+|x-y|^2)^{\frac{N}{2}}}\,dy = (N-2)\int h(y)\frac{x_j-y_j}{|x-y|^N}\,dy$$

perché $|\frac{h(x-z)}{|z|^{N-1}}| \le \|h\|_\infty \frac{1}{|z|^{N-1}}\chi_{B_R}$. In particolare, ancora (HLS), dá

$$\|\frac{\partial}{\partial x_j}(h*G_{N-2})\|_2 = (N-2)\|h*G_{N-1}\|_2 \le d(N)\|h\|_{\frac{2N}{N+2}}$$

Allora $h_n \in C_0^\infty, h_n \to h$ in $L^{\frac{2N}{N+2}} \Rightarrow \|\frac{\partial}{\partial x_j}(h_n*G_{N-2}) - \frac{\partial}{\partial x_j}(h_m*G_{N-2})\|_2 \le a(N)\|h_n-h_m\|_{\frac{2N}{N-2}} \Rightarrow h_n*G_{N-2}$ é di Cauchy in $L^2 \Rightarrow h*G_{N-2}\in\mathcal{D}^1$ e

$$\frac{\partial}{\partial x_j}(h*G_{N-2}) = \lim_n \frac{\partial}{\partial x_j}(h_n*G_{N-2}) = \lim_n (N-2)\int h_n(y)\frac{x_j-y_j}{|x-y|^N}\,dy$$

$$= (N-2)\int h(y)\frac{x_j-y_j}{|x-y|^N}\,dy$$

Esercizio 2. Sia $N \ge 3$. Sia

$$S := \inf\{\int_{\mathbf{R}^N}|\nabla u|^2 : \quad u\in\mathcal{D}^1(\mathbf{R}^N), \;\int_{\mathbf{R}^N}|u|^{\frac{2N}{N-2}} = 1\}$$

$$S(R) := \inf\{\int_{\mathbf{R}^N}|\nabla u|^2 : \quad u\in C_0^\infty(B_R), \;\int_{\mathbf{R}^N}|u|^{\frac{2N}{N-2}} = 1\}$$

Provare che $S(R) \equiv S$.

Suggerimento. Mostrare che la trasformazione $u \to \epsilon^{-\frac{N-2}{2}} u(\frac{x}{\epsilon})$ *lascia invariati sia* $\int |\nabla u|^2$ *che* $\int |u|^{\frac{2N}{N-2}}$. *Utilizzare quindi tale invarianza per mostrare l'indipendenza di* $S(R)$ *da* R. *Utilizzare poi tale invarianza ed il fatto che* C_0^∞ *é denso in* $\mathcal{D}^1$ *per provare che* $S(R) \equiv S$.

Funzioni $H^1_{loc}(\mathbf{R})$. $u \in H^1_{loc}(\mathbf{R}) \Leftrightarrow u$ é AC sugli intervalli compatti.

Prova. Se u é AC, allora é derivabile q.o. con $u' \in L^1_{loc}(\mathbf{R})$. Quindi, se $\varphi \in C_0^\infty$, $u\varphi$ é AC (sui limitati) e quindi $(u\varphi)' = u'\varphi + u\varphi'$ q.o. e quindi

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u\varphi' = -\int_{-\infty}^{+\infty} u'\varphi$$

cioé u' é anche derivata debole di u.

Viceversa, se u' é la derivata debole di u e φ é nucleo regolarizzante e quindi $u * \varphi_\epsilon \in C^\infty \cap L^1_{loc}$, $(u * \varphi_\epsilon)' = u' * \varphi_\epsilon \in C^\infty \cap L^1_{loc}$ e si ha quindi

$$|(u * \varphi_\epsilon)(y) - (u * \varphi_\epsilon)(x)| = |\int_x^y (u' * \varphi_\epsilon)(t)dt| =$$

$$|\int_x^y [\int_{-\infty}^{+\infty} u'(t-s)\frac{1}{\epsilon}\varphi(\frac{s}{\epsilon})ds]dt| = |\int_x^y [\int_{-1}^{1} u'(t-\epsilon\sigma)\varphi(\sigma)d\sigma]dt| \leq$$

$$\int_{-1}^{1} [\varphi(\sigma)\int_x^y |u'(t-\epsilon\sigma)|dt]d\sigma \leq \int_{-1}^{1} [\varphi(\sigma)\int_{x-\epsilon}^{y+\epsilon} |u'(\tau)|d\tau]d\sigma \leq \int_{x-\epsilon}^{y+\epsilon} |u'(\tau)|d\tau$$

e quindi $u * \varphi_\epsilon$ é equicontinua (in ϵ) ed evidentemente equilimitata sui compatti e quindi, lungo qualche successione $\epsilon_n \to 0$, uniformemente convergente sui compatti ad una funzione continua v, necessariamente uguale q.o. a u , perché $u * \varphi_\epsilon \to u$ in $L^1_{loc}(\mathbf{R})$ e quindi, lungo qualche successione di ϵ, anche q.o.. Dunque, passando al limite in

$$(u * \varphi_\epsilon)(y) = (u * \varphi_\epsilon)(x) + \int_x^y (u' * \varphi_\epsilon)(t)dt$$

vediamo che

$$v(y) = v(x) + \int_x^y u'(t)dt$$

Dunque u é uguale q.o. a v, e v é AC sui compatti.