AM5 2008: Tracce delle lezioni- 4

L^2 e gli spazi di HILBERT

$$\|f\|_2^2 := \int |f|^2 \; = < f,f > \quad \text{ove} \qquad < f,g > := \int fg \, d\mu, \quad \forall \, f,g \in L^2$$

é un **prodotto scalare** (ovvero una **forma bilineare simmetrica positiva**) in L^2 . Notiamo che la diseguaglianza di Holder, con $p = q = 2$ dá la ben nota

$$| \int fg| \; \leq \; \|f\|_2 \; \|g\|_2 \qquad \textbf{diseguaglianza di Cauchy-Schwartz}$$

Lo spazio $\qquad L^2$ **é uno spazio di Hilbert**:

SPAZI DI HILBERT .

Sia $(H, \|.\|)$ spazio di Banach. Se esiste in H un **prodotto scalare** $< x,y > := b(x,y), \quad x,y \in H$ ovvero b é **bilineare** e

$$< x,y > = < y,x > \qquad \forall x,y \in H, \qquad < x,x > \; > \; 0 \quad \forall x \in H, \quad x \neq 0$$

tale che $\qquad \|x\| = \sqrt{< x,x >} \quad \forall x \in H$, $\qquad H$ si dice spazio di Hilbert.

Le seguenti (ben note) proprietá si verificano facilmente:

Cauchy-Schwartz : $\qquad | < x,y > | \; \leq \; \|x\| \, \|y\| \quad \forall x,y \in H$

Pitagora : $\qquad < x,y > = 0 \;\; \Rightarrow \;\; \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 \quad \forall x,y \in H$

Regola del Parallelogramma : $\qquad \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$

La proprietá fondamentale degli spazi di Hilbert é l'esistenza della

PROIEZIONE ORTOGONALE :

Sia V sottospazio lineare chiuso di H. Allora

$$\forall h \in H \quad \exists! \;\; h_V \in V : \quad < h - h_V, v > = 0 \quad \forall v \in V$$

Tale vettore si chiama proiezione ortogonale di h su V e si indica $P_V h$.

L'operatore P_V é una **proiezione lineare** :

$$P_V^2 = P_V, \qquad P_V(rh+sk) = rP_V(h) + sP_V(k) \quad \forall r,s \in \mathbf{R}, h,k \in H$$

Inoltre P_V é operatore lineare continuo:

$$\|P_V(h)\| \leq \|h\| \quad \forall h \in H$$

Infine, indicato $V^\perp := \{h \in H : < h, v >= 0 \quad \forall v \in V\}$, risulta $KerP_V = V^\perp$.

Prova. Il vettore $v(h)$ é quello che realizza la minima distanza di h da V:

se $\quad d := \inf_{v \in V} \|h - v\|, \quad$ allora $\quad \|h - v(h)\| = d$

Esistenza: Mostriamo innanzi tutto che tale inf é realizzato: se $v_n \in V$ é minimizzante, cioé $\|h - v_n\| \to_n d$, allora, dalla regola del parallelogramma

$$\|v_n - v_m\|^2 = \|(v_n - h) + (h - v_m)\|^2 = 2(\|v_n - h\|^2 + \|h - v_m\|^2) - \|2[\frac{v_n + v_m}{2} - h]\|^2$$

$$\leq 2(\|v_n - h\|^2 + \|h - v_m\|^2) - 4d^2 \to_n 0$$

perché $\|\frac{v_n+v_m}{2} - h\| \geq d$ in quanto $\frac{v_n+v_m}{2} \in V$; dunque v_n é di Cauchy e quindi converge, necessariamente ad un elemento di V perché V é chiuso.

Poi, se $\overline{v}$ realizza il minimo, cioé $\|h - \overline{v}\| = d$, allora, fissato $v \in V$ e posto

$$\varphi_v(t) := \|h - \overline{v} + tv\|^2 = \|h - \overline{v}\|^2 + t^2\|v\|^2 + 2t < h - \overline{v}, v >$$

risulta

$$\varphi_v(t) \geq \varphi_v(0) \quad \forall t \in \mathbf{R}$$

cioé $t = 0$ é di minimo per $\varphi_v(t)$ e quindi

$$0 = \varphi_v'(0) = 2 < h - \overline{v}, v > \quad \forall v \in V$$

Unicitá: se $v_1, v_2 \in V$ sono tali che $< h - v_1, v >=< h - v_2, v > \quad \forall v \in V$ allora

$$< v_2 - v_1, v >=< h - v_1, v > - < h - v_2, v >= 0 \quad \forall v \in V$$

e quindi, prendendo $v = v_2 - v_1$, troviamo che $v_1 = v_2$.

Linearitá: Da $< h - P_V h, v > = < k - P_V k, v > = 0 \ \forall v \in V$ segue

$$< rh + sk - (rP_V h + sP_V k), v >= 0 \quad \forall v \in V \quad \Rightarrow \quad P_V(rh+sk) = rP_V h + sP_V k$$

per l'unicitá.
Poi, siccome $P_V v = v \quad \forall v \in V$ e $P_V h \in V \quad \forall h \in H$, P_V é idempotente.
Inoltre, $P_V h = 0 \Leftrightarrow < h, v >= 0 \quad \forall v \in V$.

Continuitá: Per Pitagora:

$$\|h\|^2 = \|(h - P_V h) + P_V h\|^2 = \|h - P_V h\|^2 + \|P_V h\|^2 \geq \|P_V h\|^2 \quad \forall h \in H$$

Corollario : $V = \overline{V} \quad \Rightarrow \quad H = V \oplus V^\perp$.

Infatti $V \cap V^\perp = \{0\}$ ed ogni $h \in H$ si scrive come $h = P_V h + (h - P_V h) \in V + V^\perp$.

ESEMPIO. Sia $V =< e_1, \ldots, e_n >$, $e_j \in H$, $< e_i, e_j >= \delta_{ij}$. Allora

$$P_V h = \sum_{j=1}^{n} < h, e_j > e_j$$

Essendo tutte le norme su $\mathbf{R}^n$ tra loro equivalenti, V é completo e quindi é chiuso in H. Poi,

$$< h - \sum_i < h, e_i > e_i \, , \, e_j > =< h, e_j > - < h, e_j >= 0$$

Proiezione su un insieme convesso e chiuso.

Sia C sottoinsieme chiuso in H Hilbert.
Se C é anche convesso (cioé $x, y \in C \Rightarrow tx + (1-t)y \in C \quad \forall t \in [0,1]$), allora, esattamente come nel caso in cui C é sottospazio lineare, si vede che

$$\forall h \in H \quad \exists h_C \in C : \quad \inf_C \|h - v\| = \|h - h_C$$

Fissato $v \in C$, la funzione

$$\varphi_v(t) := \|h - [tv + (1-t)h_C]\|^2 = \|h - h_C\|^2 + t^2 \|h_C - v\|^2 + 2t < h - h_C, h_C - v >, \quad t \in [0,1]$$

ha, in $t = 0$, un punto di minimo, e quindi

$$0 \leq \varphi_v'(0) = 2 < h - h_C, h_C - v > \qquad \forall v \in V$$

ovvero

$$< h - h_C, v - h_C > \leq 0 \quad \forall v \in C$$

TEOREMA DI RAPPRESENTAZIONE DI RIESZ .

Sia $l : H \to \mathbf{R}$ *lineare e continuo. Allora*

$$\exists \quad h \in H : \quad l(x) \; = < x, h > \quad \forall x \in H$$

Prova. Se $l(x) = 0 \quad \forall x \in H$, basta prendere $h = 0$. Altrimenti, l continuo $\Rightarrow$ $V := l^{-1}(0)$ é sottospazio lineare chiuso proprio di H, e quindi esiste $h \neq 0$ tale che $< h, v >= 0 \quad \forall v \in V$. Posiamo supporre $\|h\| = 1$. Siccome $l(x - \frac{l(x)}{l(h)} h) = 0 \quad \forall x \in H$, abbiamo che $< h, x - \frac{l(x)}{l(h)} h >= 0 \quad \forall x \in H$ ovvero $l(x) =< x, l(h)h >$.

NOTA. Lo spazio lineare $H' := \{l : H \to \mathbf{R} : \quad l$ é lineare e continuo$\}$ dotato della norma degli operatori

$$\|l\| := \sup_{x \neq 0} \frac{|l(x)|}{\|x\|}$$

é uno spazio di Banach. Tale spazio é detto **duale algebrico topologico** di H.

Dato $h \in H$, il funzionale $l_h : H \to \mathbf{R}$ definito come $l_h(x) :=< x, h >$, é chiaramente lineare e, per Cauchy-Schwartz, continuo e quindi é un elemento di H'. Inoltre, l'applicazione

$$T : h \to l_h$$

di H in H' é chiaramente lineare e, di piú, $\|T(h)\| = \|l_h\| = \|h\|$. Il Teorema di Riesz dice che T é suriettiva. In altre parole

Corollario (RIESZ) .

Ogni spazio di Hilbert é isometricamente isomorfo al suo duale.

Diseguaglianza di BESSEL .

$$e_j \in H, \; < e_i, e_j >= \delta_{ij} \quad \Rightarrow \quad \sum_j | < h, e_j > |^2 \leq \|h\|^2 \quad \forall h \in H$$

Prova. Posto $V_n =< e_1, \ldots, e_n >$, $P_n := P_{V_n}$, é

$$\sum_{j=1}^{n} | < h, e_j > |^2 \; = \; \|P_n h\|^2 \; \leq \; \|h\|^2 \quad \forall h \in H, \quad \forall n \in \mathbf{N}$$

BASE HILBERTIANA (o base ortonormale) .

• Un sistema di vettori e_j é **sistema ortonormale** se $\quad < e_i, e_j >= \delta_{ij}$

•• Un sistema di vettori e_j é **completo** se $\quad < x, e_j >= 0 \quad \forall j \quad \Rightarrow \quad x = 0$

NOTA.

(i) Un sistema ortonormale e_j é completo se e solo se $< e_j >$, varietá lineare generata dagli e_j, é densa in H.
Ad esempio, $\quad e_j := \frac{e^{ijt}}{\sqrt{2\pi}}, \quad t \in [0, 2\pi], \quad j \in \mathbf{Z}$ formano un sistema ortonormale completo in $\quad L^2([0, 2\pi])$.
Ció segue dal teorema di Weierstrass (ogni funzione continua in $[0, 2\pi]$ é limite uniforme di polinomi trigonometrici) e del fatto che, come vedremo, se Ω é aperto in $\mathbf{R}^N$, $C_0^\infty(\Omega)$ (spazio delle funzioni $C^\infty(\Omega)$ a supporto compatto contenuto in Ω), é denso in ogni L^p.

(ii) **Ogni Hilbert separabile H ha un sistema ortonormale (numerabile) completo**.
Infatti, se D é numerabile e denso in H, da D si puó costruire un insieme numerabile di vettori linearmente indipendenti f_j tali che la varietá lineare $< f_j >$ coincide con $< D >$ e quindi $< f_j >$ é densa in H. Posto $e_1 = \frac{f_1}{\|f_1\|}$ e quindi, induttivamente, $e_{k+1} = \frac{v_{k+1}}{\|v_{k+1}\|}$, ove

$$v_{k+1} := f_{k+1} - \sum_{j=1}^{k} < f_{k+1}, e_j > e_j$$

(proiezione ortogonale di f_{k+1} sulla varietá generata dagli $e_j : j = 1, \ldots, k$: procedimento di ortonormalizzazione di Gram-Schmidt) si ottiene un sistema (numerabile) ortonormale che genera una varietá lineare densa (e quindi é completo).

• • • Un sistema ortonormale di vettori e_j é **base hilbertiana** se

$$x = \sum_j < x, e_j > e_j := \lim_n \sum_{j=1}^{n} < x, e_j > e_j \quad \forall x \in H$$

I numeri $< x, e_j >$ si chiamano **coefficenti di Fourier** di x nella base e_j.

Proposizione 1. Un sistema ortonormale completo e_j é base hilbertiana e
(**IDENTITÁ DI PARSEVAL**) $\quad \|x\|^2 = \sum_j | < x, e_j > |^2 \quad \forall x \in H$

Sia $x_n := \sum_{j=1}^n < x, e_j > e_j$. Dalla diseguaglianza di Bessel segue che $\|x_{n+p} - x_n\|^2 = \sum_{n+1}^{n+p} | < x, e_j > |^2 \to_n 0$ per ogni p, ovvero x_n é di Cauchy e quindi converge, diciamo a $\overline{x}$. Proviamo che $\overline{x} = x$. Infatti, $< \overline{x}, e_k >= \lim_n < x_n, e_k >=< x, e_k >$. Dunque $< x - \overline{x}, e_k >= 0 \quad \forall k$ e quindi $x = \overline{x}$. Infine, $x_n \to x \Rightarrow \|x_n\| \to_n \|x\|$ e quindi $\sum_{j=1}^n | < x, e_j > |^2 = \|x_n\|^2 \to \|x\|^2$.

Proposizione 2. Ogni Hilbert separabile ha una base hilbertiana.

NOTA. Sia e_j base ortonormale. Da Parseval: $\quad x \to (Fx)_j :=< x, e_j >, \quad x \in H$ é una isometria (lineare) di H su l^2. $\quad$ (Suriettivitá: $\quad (a_j)_{j \in \mathbf{N}}, \ \sum_j |a_j|^2 < +\infty \quad \Rightarrow \quad x := \sum_j a_j e_j \in H \quad$ é tale che $\quad (Fx)_j = a_j$.)

Teorema di isomorfismo. Ogni Hilbert separabile, é isometricamente isomorfo a l^2.

NOTA. Piú in generale, ogni Hilbert é isometricamente isomorfo a un $L^2(X, \mu)$, ove X é l'insieme degli indici di una base hilbertiana per H (eventualmente non numerabile) e μ é la misura che conta.

CONVERGENZA DEBOLE

Ricordiamo che $x_n \to_n x$ (x_n **converge in norma (o fortemente** ad x) se $\|x_n - x\| \to_n 0 \quad$ e $\quad x_n \in H$ si dice **limitata** se $\sup_n \|x_n\| < +\infty$.

NOTA: **successioni limitate** in spazi di Hilbert di dimensione infinita **non hanno in generale sottosuccessioni convergenti**. Ad esempio, se $e_j, j \in \mathbf{N}$ é sistema ortonormale, allora $\|e_i - e_j\|^2 = 2$ se $i \neq j$ e quindi e_j non ha estratte convergenti.

Definizione $\quad ('\rightharpoonup' \quad = \quad$ ' converge debolmente').

$$x_n \rightharpoonup_n 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad < x_n, h > \to_n 0 \quad \forall h \in H$$

Si dice che $\quad x_n \rightharpoonup_n x \quad$ se $\quad (x_n - x) \rightharpoonup_n 0$. Dalla diseguaglianza di Bessel segue ad esempio che, se $\quad e_j, j \in \mathbf{N}\quad$ é sistema ortonormale, $\quad e_j \rightharpoonup_j 0$.

Proposizione 1

(i) $x_n \to x \quad \Rightarrow \quad x_n \rightharpoonup_n x \qquad$ (ma non viceversa !)

(ii) $x_n \rightharpoonup_n x,\ \ y_n \rightharpoonup_n y, \quad \alpha,\beta \in \mathbf{R} \quad \Rightarrow \quad \alpha x_n + \beta y_n \rightharpoonup_n \alpha x + \beta y$

(iii) $x_n \rightharpoonup_n x \quad \Rightarrow \quad \liminf \|x_n\| \geq \|x\|$

Prova. (i) $| < x_n - x, h > | \leq \|h\|\ \|x_n - x\| \to_n 0.$ (ii) ovvia (iii) Possiamo supporre $x \neq 0$. Allora

$$| < x_n, \frac{x}{\|x\|} > | \leq \|x_n\| \quad \Rightarrow \quad \|x\| \ = \ \lim_n | < x_n, \frac{x}{\|x\|} > | \ \leq \ \liminf \|x_n\|$$

NOTA. (iii) dice: la norma é 'inferiormente semicontinua rispetto alla convergenza debole'.

Teorema (uniforme limitatezza). $x_n \rightharpoonup_n x \quad \Rightarrow \quad \sup_n \|x_n\| < +\infty$

Prova. Posto $y_n := x_n - x$ é $y_n \rightharpoonup 0$. Se y_n é non limitata, allora, per una sottosuccessione (ancora indicata y_n), si avrá $\|y_n\| \geq 4^n$ e quindi

$$h_n := 4^n \frac{y_n}{\|y_n\|}, \qquad \|h_n\| = 4^n, \qquad < y_n,\ h > \to_n 0 \quad \forall h \in H$$

Basta quindi provare che se $\|h_n\| = 4^n$ allora non puó accadere che $h_n \rightharpoonup 0$. Per provare tale affermazione, poniamo

$$h := \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\sigma_j}{3^j} \frac{h_j}{\|h_j\|}, \qquad |\sigma_j| = 1 \quad \forall j$$

e proviamo che, per una scelta opportuna dei σ_j risulta $| < h_j, h > | \to_n +\infty$. É

$$| < h_n, h > | = | \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\sigma_j}{3^j} < h_n, \frac{h_j}{\|h_j\|} > | \geq$$

$$\left| \, | \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\sigma_j}{3^j} < h_n, \frac{h_j}{\|h_j\|} > + \frac{\sigma_n}{3^n} \|h_n\| \, | \ - | \sum_{j>n} \frac{\sigma_j}{3^j} < h_n, \frac{h_j}{\|h_j\|} > | \right|$$

Se scegliamo $\sigma_1 := 1$ e, induttivamente,

$$\sigma_n := 1 \ \text{ se } \ \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\sigma_j}{3^j} \ < h_n, \frac{h_j}{\|h_j\|} \geq 0 \ \text{ e } \ \sigma_n := -1 \ \text{ se } \ \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\sigma_j}{3^j} \ < h_n, \frac{h_j}{\|h_j\|} < 0$$

vediamo che $| < h_n, h > | \geq \frac{4^n}{3^n} - \sum_{j>n} \frac{1}{3^j} \|h_n\| = \frac{1}{2} \frac{4^n}{3^n}$.

Lemma di Mazur. $h_n \in C$ *chiuso e convesso*, $h_n \rightharpoonup_n h \;\Rightarrow\; h \in C$.

Prova. Siccome $h_n \in C$, indicata con h_C la proiezione di h su C, si ha $< h - h_C, h_n - h_C > \leq 0 \quad \forall n$. Passando al limite otteniamo $\|h - h_C\|^2 \leq 0$ e quindi $h = h_C \in C$.

Proposizione 2

(i) $x_n \rightharpoonup_n x,\; y_n \to y \quad \Rightarrow \quad < x_n, y_n > \to_n < x, y >$

(ii) $\overline{< e_i >} = H,\; < x_n, e_j > \to_n 0 \quad \forall j, \quad \sup_n \|x_n\| < +\infty \quad \Rightarrow \quad x_n \rightharpoonup_n 0$

Prova. (i) $| < x_n, y_n > - < x\, , y > | \;=\; | < x_n - x, y > \;+\; < x_n\, , y_n - y > | \;\leq$

$\leq\; | < x_n - x, y > | \;+\; \|y_n - y\|\, \|x_n\| \;\to_n 0$ perché x_n é limitata

(ii) $< x_n, h > \to_n 0 \quad \forall h \in < e_j >$. Se $h_k \in < e_j >$, $h_k \to_k h$, allora $| < x_n, h > | \leq | < x_n, h_k > | + | < x_n, h - h_k > | \quad \Rightarrow \quad \limsup_n | < x_n, h > | \leq \|h_k - h\| \quad \sup_n \|x_n\| \quad \forall k \in \mathbf{N}$ e quindi $\limsup_n | < x_n, h > | = 0$.

Compattezza debole. *Sia* H *Hilbert separabile. Allora* x_n **limitata** $\Rightarrow$ x_n **ha una estratta debolmente convergente**.

Prova. Sia e_j base ortonormale. Siccome x_n é limitata, basta (vedi Proposizione 2-(ii)) provare che $\exists \quad x_{n_k},\; x : \quad < x_{n_k}, e_j > \to_k < x, e_j > \quad \forall j \in \mathbf{N}$

Siccome $| < x_n, e_1 > | \leq \sup_n \|x_n\| < +\infty$, esiste una (prima) selezione di indici $n_j = n_j^1$ e un numero c_1 tale che $c_1 = \lim_j < x_j^1, e_1 >$. Effettuando una (ulteriore) selezione di indici n_j^2, troviamo che $\exists c_i := \lim_j < x_{n_j^2}, e_i >$ $i = 1, 2$. Effettuando k successive selezioni di indici $(n_j^{k-1})_{j \in \mathbf{N}} \subset (n_j^k)_{j \in \mathbf{N}}$ ed applicando il **principio diagonale di Cantor** troviamo che lungo la sottosuccessione (diagonale) $n_k := n_k^k$ si ha $\exists c_i := \quad \lim_k < x_{n_k}, e_i > \quad \forall i \in \mathbf{N}$

Da $\sum_{i=1}^N c_i^2 \;=\; \lim_k \sum_{i=1}^N | \;<\; x_{n_k}, e_i \;>\; |^2 \;\leq\; \sup_n \|x_n\|^2 \quad \forall N$ segue che $\sum_{i=1}^\infty c_i^2 < +\infty$. Resta quindi definito il vettore in H dato da $x := \sum_{i=1}^\infty c_i e_i$ avente appunto la proprietá $< x, e_j >= c_j = \lim_k < x_{n_k}, e_j >$.

NOTA. L'ipotesi di separabilitá si puó facilmente eliminare, argomentando nella chiusura della varitá lineare generata dagli x_n (che é appunto separabile).

Esercizi e complementi 4

SERIE DI FOURIER DI FUNZIONI $L^2([-\pi,\pi])$

Indichiamo con $C_{2\pi}$ lo spazio delle funzioni continue in $\mathbf{R}$ a valori complessi che sono 2π periodiche, dotato della norma della convergenza uniforme in $[-\pi,\pi]$:

$$C_{2\pi} \quad := \quad \{f \in C(\mathbf{R},\mathbf{C}) : \quad f(t+2\pi) = f(t) \quad \forall t \in \mathbf{R}\}, \qquad \|f\|_\infty := \sup_{t\in[-\pi,\pi]} |f(t)|$$

Tra tali funzioni é definito il prodotto di convoluzione

$$f \star g \ (t) := \int_{-\pi}^{\pi} f(t-s)\, g(s) ds$$

Indicheremo con $\mathcal{PT}$ il sottospazio dei polinomi trigonometrici, ovvero il sottospazio lineare generato da $e^{ijt} : j \in \mathbf{N}$.

Esercizio 1 . Provare che

(i) $f \star g \quad = \quad g \star f$ (ii) $f \in C_{2\pi}, \quad g \in \mathcal{PT} \quad \Rightarrow \quad f \star g \in \mathcal{PT}$

Esercizio 2. Siano $g_n \in C_{2\pi}$ tali che

$$g_n(t) \geq 0 \quad \forall t, \qquad \int_{-\pi}^{\pi} g_n = 1 \quad \forall n \in \mathbf{N}, \qquad \int_{|t|\geq\delta} g_n \to_n 0 \quad \forall \delta > 0$$

Provare che $f \star g_n \to_n f$ uniformemente in $[-\pi,\pi]$.

Esercizio 3 . Siano

$$\tilde{g}(t) := \frac{1+\cos t}{2} = \frac{1}{2}[1 + \frac{e^{it}+e^{-it}}{2}], \qquad g_n := \frac{\tilde{g}^n}{\int_{-\pi}^{\pi} \tilde{g}^n}$$

Provare che le g_n soddisfano le condizioni dell'Esercizio 2 e concludere che $\mathcal{PT}$ é denso in $C_{2\pi}$.

Esercizio 4. Sia $f \in L^2([-\pi,\pi])$. Provare che

$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists \phi_\epsilon \in C_0([-\pi,\pi]) : \qquad \int_{-\pi}^{\pi} |f - \phi_\epsilon|^2 \leq \epsilon$$

e concludere che $\frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin kt$, $\frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos kt$, $k \in \mathbf{N}$ é base hilbertiana in $L^2([-\pi,\pi])$.

SPAZI DI HILBERT, CONVERGENZA DEBOLE

Sia H Hilbert. $C \subset H$, $\Gamma : C \to \mathbf{R}$ sono **convessi** se

$$tx + (1-t)y \in C, \qquad \forall x, y \in C, \quad \forall t \in [0,1]$$

$$\Gamma(tx + (1-t)y) \quad \leq \quad t\Gamma(x) + (1-t)\Gamma(y) \qquad \forall x, y \in C, \quad \forall t \in [0,1]$$

Esercizio 1. Sia $C \subset H$ chiuso e convesso. Provare che

$$\forall h \in H, \quad \exists\ !\ h_C \in C : \quad \|h - h_C\| \leq \|h - v\|, \quad \forall v \in C$$

e che
$$< h - h_C,\ v - h_C > \leq 0, \qquad \forall v \in C.$$

Esercizio 2. Sia C chiuso e convesso in H. Provare che

$$x_n \in C, \quad x_n \rightharpoonup x \quad \Rightarrow \quad x \in C$$

Dedurre che, se $x_n \rightharpoonup x$ allora esistono $\tilde{x}_n$, combinazioni lineari convesse degli x_n, tali che $\|\tilde{x}_n - x\| \to_n 0$.

Esercizio 3. Sia C convesso e $\Gamma : C \to \mathbf{R}$ funzionale convesso e continuo.

Provare che $\quad x_n \in C, \quad x_n \rightharpoonup x \quad \Rightarrow \quad \liminf \Gamma(x_n) \geq \Gamma(x)$

Esercizio 4. Sia C chiuso e convesso in H, $\Gamma : C \to \mathbf{R}$ continuo e

coercivo: $\quad x_n \in C, \quad \|x_n\| \to +\infty \quad \Rightarrow \quad \Gamma(x_n) \to +\infty$

Provare che $\quad \exists \underline{x} \in C : \quad \inf_C \Gamma = \Gamma(\underline{x})$.

Esercizio 5. Provare che

$$x_n \rightharpoonup x, \ \|x_n\| \to \|x\| \ \Rightarrow \ \|x_n - x\| \to 0$$

Esercizio 6. Sia $L \in \mathcal{L}\,(H)$ (operatore lineare e continuo in H).

Provare che esiste un (unico) $L^\star \in \mathcal{L}\,(H)$ tale che $< L^\star x, y >=< x, Ly >$ $\forall x, y \in H$ (**operatore aggiunto** di L) e dedurre che $\quad x_n \rightharpoonup x \ \Rightarrow \ Lx_n \rightharpoonup Lx$

Esercizio 7. Provare che $\int_A e^{inx}dx \to 0 \forall A \subset [0,\pi]$ misurabile e dedurre che , se $n_k < n_{k+1}$, l'insieme $\{x \in [0,\pi] : \ \sin(n_k x) \ \text{ converge } \}$ è di misura nulla.

CENNI DI SOLUZIONE

Serie di Fourier in $L^2([-\pi,\pi])$

Esercizio 1 - (ii). Sia $g(t)=\sum_{j=1}^n c_j\, e^{ijt}$. Si ha

$$(f\star g)(t) \;=\; \int_{-\pi}^{\pi} f(s)\,\left[\sum_{j=1}^n c_j\, e^{ij(t-s)}\right] ds = \sum_{j=1}^n\; [c_j \int_{-\pi}^{\pi} f(s)e^{-ijs}\; ds]\; e^{ijt}$$

Esercizio 2.

$$|(f\star g_k)(t)\;-\;f(t)| \;=\; \left|\int_{-\pi}^{\pi} f(t-s)\, g_k(s)\, ds \;-\; \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, g_k(s)\, ds\right| \;\le$$

$$\le \int_{|s|\le\delta} |f(t-s)-f(t)|\;\; g_k(s)\, ds \;+\; 2\,\|f\|_\infty \int_{|s|\ge\delta} g_k(s)\, ds \;\le\; \epsilon \;+\; 2\|f\|_\infty\epsilon$$

se $\delta\le\delta_\epsilon,\quad |s|\le\delta \quad\Rightarrow\quad |f(t-s)-f(s)|\le\epsilon$ e $k\ge k_\epsilon \quad\Rightarrow\quad \int_{|t|\ge\delta} g_k\le\epsilon.$

Esercizio 3. Si tratta di provare che $\int_{|s|\ge\delta} g_k(s)\, ds \;\to_k 0 \quad \forall\delta>0.$

É

$$c_k := \int_{-\pi}^{\pi} \left[\frac{1+\cos t}{2}\right]^k dt \quad\ge\; 2\int_0^{\pi} \left[\frac{1+\cos t}{2}\right]^k \sin t\; dt =$$

$$= \;-\frac{4}{k+1}\int_0^{\pi} \frac{d}{dt}\left[\frac{1+\cos t}{2}\right]^{k+1} = \frac{4}{k+1}.$$

Quindi

$$\frac{1}{c_k}\int_{|s|\ge\delta} g_k(s)\, ds \;\le\; \frac{(k+1)\pi}{2}\left[\frac{1+\cos\delta}{2}\right]^k \quad\to_k 0\quad \forall\delta>0$$

Esercizio 4. Possiamo supporre $f\equiv 0$ fuori di $[-\pi,\pi]$ e infatti

$$f\equiv 0 \qquad \forall\; t\notin[-\pi+\frac{1}{n},\pi-\frac{1}{n}]$$

perché

$\int|f-f\chi_{[-\pi+\frac{1}{n},\pi-\frac{1}{n}]}|^2\le\epsilon$ se n é grande (assoluta continuitá dell'integrale). Siccome $f=f^+-f^-$, basta provare che

se $g\ge 0$, $g\in L^2(\mathbf{R})$, $g(t)\;=\;0$ $\forall\, t\notin[-\pi+\frac{1}{n},\pi-\frac{1}{n}]$, allora

$$\forall\epsilon>0,\quad \exists\tilde g\in C_0((-\pi,\pi)):\qquad \int_{-\pi}^{\pi} |g-\tilde g|^2\;\le\;\epsilon$$

Siccome poi esistono funzioni semplici $0 \le \phi_n \le g$ con $\phi_n \le \phi_{n+1}$ puntualmente convergenti a f, e quindi (convergenza monotona!) convergenti a g anche in L^2, basta provare che,

se $E \subset [-\pi + \frac{1}{n}, \pi - \frac{1}{n}]$ é Lebesgue misurabile , allora

$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists \quad h \in C_0(-\pi,\pi): \quad \int |\chi_E - h|^2 \le \epsilon$$

Ma ció segue subito dal fatto che

$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists \quad K_\epsilon \subset E \subset O_\epsilon \subset (-\pi,\pi): \qquad L^1(O_\epsilon \setminus K_\epsilon) \le \epsilon$$

con K_ϵ compatto, O_ϵ aperto.

Infatti, dato $\delta > 0$ tale che $d(x, K_\epsilon) \le \delta \Rightarrow x \in O_\epsilon$, basta prendere $\varphi_\epsilon(x) := \gamma(d(x, K_\epsilon))$ ove $\gamma \in C(\mathbf{R})$ con $\gamma(0) = 1$ e $\gamma(t) = 0$ se $t \ge \delta$:

$$\int |\varphi_\epsilon - \chi_E|^2 \le 4 \int \chi_{O_\epsilon \setminus K_\epsilon} = 4L^1(O_\epsilon \setminus K_\epsilon) \le 4\epsilon$$

Spazi di Hilbert, convergenza debole

Esercizio 1. L'esistenza di h_C segue come nel caso in cui C é sottospazio lineare. Poi,

$$v \in C \Rightarrow \|h - [tv + (1-t)h_C\|^2 \ge \|h - h_C\|^2 \quad \forall t \in [0,1] \Rightarrow$$

$$0 \le \frac{d}{dt} \left[\|h - [tv + (1-t)h_C\|^2\right]_{|t=0} =$$

$$\frac{d}{dt} \left[\|h\|^2 + t^2\|v\|^2 + (1-t)^2\|h_C\|^2 - 2 < h, tv + (1-t)h_C > +2t(1-t) < v, h_C >\right]_{|t=0}$$

$$= -2\|h_C\|^2 - 2 < h, v > +2 < h, h_C > +2 < v, h_C > = -2 < h - h_C, v - h_C >$$

Esercizio 2. $x_n \in C$, $x_n \rightharpoonup x$, x_C proiezione di x sul convesso chiuso $C \Rightarrow$

$$< x - x_C, x_n - x_C > \le 0 \quad \Rightarrow \quad < x - x_C, x - x_C > \le 0 \quad \Rightarrow \quad x = x_C \in C$$

Esercizio 3. Sia $c := \liminf_n \Gamma(x_n) = \lim_j \Gamma(x_{n_j})$. Allora

$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists j_\epsilon: \qquad j \ge j_\epsilon \quad \Rightarrow \quad x_{n_j} \in \Gamma^{c+\epsilon} := \{x \in C : \Gamma(x) \le c + \epsilon\}$$

Ora, $\Gamma^{c+\epsilon}$ é chiuso (perché Γ é continuo) e convesso (perché Γ é convesso), e quindi (Esercizio 2)

$$x_n \rightharpoonup x \ , x_n \in \Gamma^{c+\epsilon} \quad \Rightarrow \quad x \in \Gamma^{c+\epsilon} \quad \forall \epsilon > 0$$

ovvero $\quad \Gamma(x) \leq c + \epsilon, \quad \forall \epsilon > 0.$

Esercizio 4. Sia $x_n \in C$ minimizzante: $\qquad \Gamma(x_n) \to \inf_C \Gamma.$

Dalla coercivitá segue $\sup_n \|x_n\| < +\infty$ e quindi esiste una sottosuccessione x_{n_k} (ancora minimizzante) che converge debolmente a un x. Siccome C é chiuso e convesso, allora (Esercizio 2) $\quad x \in C \quad$ e quindi (Esercizio 3)

$$\inf_C \Gamma \quad = \quad \liminf_k \Gamma(x_{n_k}) \quad \geq \quad \Gamma(x) \quad \geq \quad \inf_C \Gamma$$

Esercizio 5. $\quad \|x_n - x\|^2 = \|x_n\|^2 + \|x\|^2 - 2 < x, x_n > \to 2\|x\|^2 - 2 < x, x >.$

Esercizio 6. Indichiamo con $\quad G : H \to H^\star \quad$ l'isomorfismo di Riesz:

$$\forall h \in H, \qquad G(h)\ (x) \ = < h, x > \qquad \forall x \in H$$

Fissato $y \in H$, $\quad x \to l^y(x) :=< L(x), y > \quad$ é un funzionale lineare e continuo e quindi esiste un unico vettore, diciamo $\quad L^\star(y), \quad$ tale che

$$G(L^\star(y)) = l^y, \quad \text{ovvero} \qquad < L^\star(y), x > \ = \ l^y(x) =< L(x), y > \qquad \forall x \in H$$

Chiaramente, $\quad L^\star$ é lineare e $\qquad | < L^\star(y), x > | \ = \ | < L(x), y > |$

$$\leq \ \|Lx\| \ \|y\| \ \leq \ \|L\| \ \|x\| \ \|y\| \quad \Rightarrow \quad \|L^\star(y)\ \| \ \leq \ \|L\| \ \|y\|$$

e quindi $\quad L^\star$ é continuo e

$$\|L^\star\| := \ \sup\{\|L^\star(y) : \quad \|y\| \leq 1\} \ \leq \ \|L\|$$

In effetti, siccome chiaramente $\quad (L^\star)^\star = L, \;$ si ha $\; \|L^\star\| = \|L\|. \qquad$ Infine,

$$x_n \rightharpoonup x \quad \Rightarrow \quad < L(x_n), y >=< L^\star(y), x_n > \to < L^\star(y), x >=< L(x), y > \qquad \forall y \in H$$

Esercizio 7. Da Bessel:

$$\sum_n |\int_0^{2\pi} e^{int}\chi_A dt|^2 \leq \|\chi_A\|_2^2 \quad \Rightarrow \quad \int_0^{2\pi} e^{int}\chi_A dt \to_n 0$$

Poi, se $f(x) := \lim \sin(n_k x)$ in $A := \{x : \exists \lim_k \sin(n_k x)\}$, per quanto sopra si ha

$$0 = \lim_k \int_0^\pi \sin(n_k x)\chi_{\{f \geq 0\}} = \int_0^\pi f\chi_{\{f \geq 0\}}$$

e quindi $f^+ = 0$ q.o. ed, analogamente per f^- e quindi esiste N_s con $\mu(N_s) = 0$ tale che $\sin n_k x \to 0$ in $A \setminus N_s$.
Analogamente, $\cos n_k x \to 0$ in $A \setminus N_c$. Ma $1 = \sin^2 n_k x + \cos^2 n_k x \to 1$ in A e quindi $A \subset N_s \cup N_c$.