AM5-2008: Tracce delle lezioni- 1

MISURE.

Dato un insieme X, una famiglia Σ di sottoinsiemi di X si chiama **σ-algebra** se

$$(i)\ \ \emptyset \in \Sigma, \qquad (ii)\ \ E \in \Sigma \Rightarrow E^c \in \Sigma, \qquad (iii)\ \ E_j \in \Sigma \Rightarrow \cup_{j=1}^{+\infty} E_j \in \Sigma$$

Una funzione $\mu : \Sigma \to [0, +\infty]$, si chiama **misura** se: $\quad \mu(\emptyset) = 0 \quad$ e

(numerabile additivitá) $\qquad E_j \in \Sigma, \quad E_i \cap E_j = \emptyset \quad \forall i \neq j \qquad \Rightarrow$

$$\mu(\cup_{j=1}^{+\infty} E_j) = \sum_{j=1}^{+\infty} \mu(E_j)$$

!! →!! $\qquad A_j \in \Sigma \ \Rightarrow\ \cap_j A_j = (\cup_j A_j^c)^c \in \Sigma, \qquad A, B \in \Sigma \ \Rightarrow\ A \setminus B = A \cap B^c \in \Sigma$

Proposizione 1. Sia $\mu : \Sigma \to [0, +\infty]$ misura. Allora

(i) $\ A, B \in \Sigma,\ A \subset B \ \Rightarrow\ \mu(A) \le \mu(B)$

(ii) $\ A, B \in \Sigma,\ A \subset B,\ \ \mu(A) < +\infty \ \Rightarrow\ \ \mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$

(iii) $\ E_j \in \Sigma,\ E_j \subset E_{j+1}\ \ \forall j \ \Rightarrow\ \mu(E_j) \to \mu(\cup_{j=1}^{+\infty} E_j)$ $\quad$ (in modo crescente)

(iv) $\ E_j \in \Sigma,\ E_{j+1} \subset E_j \quad \forall j,\ \mu(E_1) < +\infty \ \Rightarrow\ \mu(E_j) \to \mu(\cap_{j=1}^{+\infty} E_j)$

Prova. $\qquad$ (i)-(ii): $\ B = (B \setminus A) \cup A \Rightarrow \mu(B) = \mu(B \setminus A) + \mu(A)$

(iii) $\ $ Ovvio se $\mu(E_j) = +\infty$ per qualche j. Sia dunque $\mu(E_j) < +\infty \ \ \forall j$. Scriviamo $E_0 := \emptyset$. É $\ \cup_{j=0}^{+\infty} E_j = \cup_{j=1}^{+\infty} [E_{j+1} \setminus E_j]$ $\ $ unione disgiunta e quindi

$$\mu(\cup_{j=1}^{+\infty} E_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(E_{j+1} \setminus E_j) = \lim_n \sum_{j=0}^{n} \mu(E_{j+1} \setminus E_j) = \lim_n \mu(E_{n+1})$$

(iv) $\quad E_1 \setminus \cap_j E_j = \cup_j (E_1 \setminus E_j) \quad$ unione crescente e $\quad \mu(E_1) < +\infty \qquad \Rightarrow$

$$\mu(E_1) - \mu(\cap_i E_i) = \mu(E_1 \setminus \cap_j E_j) = \mu(\cup_j [E_1 \setminus E_j]) = \lim_n \mu(E_1 \setminus E_j)$$

$$= \mu(E_1) - \lim_n \mu(E_j)$$

Definizione 1: Misure "esterne" (generazione di misure).

Dato un insieme X, sia $\mathcal{P}\ (X) := \{A :\ A \subset X\}$ l'insieme delle parti di X. Una funzione $\mu : \mathcal{P}\ (X) \to [0, +\infty]$, si chiama misura (esterna), se $\mu(\emptyset) = 0$ e

$$A \subset \cup_{j=1}^{+\infty} A_j \quad \Rightarrow \quad \mu(A) \leq \sum_{j=1}^{+\infty} \mu(A_j) \qquad \textbf{(numerabile subadditivitá)}$$

! →! μ é monotona: $A \subset B \quad \Rightarrow \quad \mu(A) \ \leq \mu(B)$.

Esempi: le misure (esterne) di Lebesgue e di Hausdorff in $\mathbf{R}^N$

Misura di Lebesgue. Qui $R = I_1 \times \ldots \times I_N$, I_j intervalli in $\mathbf{R}$, denota un rettangolo in $\mathbf{R}^N$, e $\mathrm{Vol}(R) = l(I_1) \times \ldots \times l(I_N)$ $(0\ \infty := 0)$ é il suo volume ($l(I)$:= lunghezza di I). La misura di Lebesgue L^N é definita dalla posizione:

$$L^N(A) \ := \ \inf\{\sum_1^{+\infty} \mathrm{Vol}(R_j) \ \ : \ A \subset \cup_j R_j\}, \quad A \subset \mathbf{R}^N$$

Nota che $L^N(R) = \mathrm{Vol}(R)$. L^N é misura (esterna). Infatti, dato $A \subset \cup_j A_j$, e supposto $\mu(A_j) < \infty \quad \forall j$, sia $A_j \subset \cup_i R_{ij}$ con $\sum_i \mathrm{Vol}(R_{ij}) \leq L^N(A_j) + \frac{\epsilon}{2^j}$. Allora $A \ \subset \ \cup_{ij} R_{ij}$ e quindi $L^N(A) \leq \sum_{ij} \mathrm{Vol}(R_{ij}) \leq 2\epsilon + \sum_j L^N(A_j)$.

Invarianza per traslazione, N-omogeneitá.

Ricordiamo che se $A \subset \mathbf{R}^N, h \in \mathbf{R}^N, t > 0$, $A + h := \{x + h|\ x \in A\}$, $tA := \{tx|\ x \in A\}$ sono rispettivamente il traslato di A lungo h, il dilatato di A (di coefficente t). Da $\mathrm{vol}(R + h) = \mathrm{vol}\ (R)$, $\mathrm{vol}\ (tR) = t^N\ \mathrm{vol}\ (R)$, segue che

$$L^N(A + h) \ = \ L^N(A), \qquad L^N(tA) \ = \ t^N L^N(A) \quad \forall A \subset \mathbf{R}^N, \quad h \in \mathbf{R}^N, \ t \geq 0$$

Misura di Hausdorff. Dati $s \geq 0$, $\delta > 0$, $A \subset \mathbf{R}^n$, siano

$$H^s_\delta(A) \ := \ \inf\ \{\sum_{j=1}^{+\infty} (\mathrm{diam}\ C_j)^s \ : \ A \subset \cup_{j=1}^{+\infty} C_j, \ \ C_j = \overline{C}_j, \ \ \mathrm{diam} C_j \leq \delta\}$$

$$H^s(A) \ := \ \sup_{\delta > 0}\ H^s_\delta(A)$$

H^s é misura (esterna) (detta di Hausdorff s-dimensionale).

Come sopra, $H^s(A + h) = h^s(A)$, $H^s(tA) = t^s H^s(A)$.

Definizione 2: Insiemi misurabili. Sia μ misura (esterna) su X. Diremo che

$E \subset X$ è μ-misurabile se $\quad \mu(A) = \mu(A \cap E) + \mu(A \cap E^c), \quad \forall A \subset X$

o, equivalentemente, $\quad A \subset E,\ B \subset E^c \Rightarrow \mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$

Σ_μ denoterá la classe dei μ-misurabili.

$! \to !$(i) $\quad \mu(E) = 0 \Rightarrow E \in \Sigma_\mu$.

$! \to !$(ii) $\quad E \subset \mathbf{R}^n$ é (Lebesgue) misurabile $\Rightarrow E + h, \quad tE$ sono (Lebesgue) misurabili .

Proposizione 2 : $\mu_{|\Sigma_\mu}$ **é una misura**

(i) $E_j \in \Sigma_\mu,\ E_i \cap E_j = \emptyset \ \ \forall\, i \neq j \Rightarrow \mu(\cup_{j=1}^{+\infty} E_j) = \sum_{j=1}^{+\infty} \mu(E_j)$

(ii) Σ_μ è una σ-algebra

Prova di (i): $\quad E \in \Sigma_\mu, \quad A \cap E = \emptyset \Rightarrow \mu(A \cup E) = \mu(A) + \mu(E)$. Dall'ipotesi segue quindi $\mu(\cup_{i=1}^n E_i) = \sum_1^n \mu(E_i), \ \forall n$ e quindi

$$\sum_1^{+\infty} \mu(E_i) \geq \mu(\cup_{i=1}^{+\infty} E_i) \geq \mu(\cup_{i=1}^n E_i) = \sum_1^n \mu(E_j) \quad \forall n$$

Prova di (ii) : Ovviamente $\emptyset \in \Sigma_\mu$ e $E \in \Sigma_\mu$ se e solo se $E^c \in \Sigma_\mu$. Poi

$$E_1,\ E_2 \in \Sigma_\mu \Rightarrow \mu(A) = \mu(A \cap E_1) + \mu(A \cap E_1^c \cap E_2) + \mu(A \cap E_1^c \cap E_2^c) =$$

$$= \mu(A \cap (E_1 \cup E_2)) + \mu(A \cap (E_1 \cup E_2)^c) \Rightarrow E_1 \cup E_2 \in \Sigma_\mu$$

In particolare, $E, F \in \Sigma_\mu \Rightarrow E \setminus F = (E^c \cup F)^c \in \Sigma_\mu$ e quindi $F_1 := E_1$ e $F_{n+1} := E_{n+1} \setminus \cup_{j=1}^n E_j$ sono misurabili, chiaramente tra loro disgiunti e, infine $\cup_{j=1}^n F_j = \cup_{j=1}^n E_j$ Sostituendo eventualmente gli E_n con gli F_n, possiamo supporre gli E_j tra loro disgiunti.
Ora, dalla misurabilitá di $\cup_{j=1}^n E_j$ segue che $\mu(A) \geq \mu(A \cap (\cup_1^n E_i)) + \mu(A \cap (\cup_{i=1}^{+\infty} E_i)^c)$. Ma, essendo gli E_j misurabili e disgiunti, é $\mu(A \cap (E_1 \cup E_2)) = \mu(A \cap E_1) + \mu(A \cap E_2)$ e quindi, iterando, $\mu(A \cap (\cup_1^n E_j)) = \sum_{i=1}^n \mu(A \cap E_i)$. Dunque , passando al limite

$$\mu(A) \geq \sum_{i=1}^{+\infty} \mu(A \cap E_i) + \mu(A \cap (\cup_{i=1}^{+\infty} E_i)^c) \geq \mu(A \cap (\cup_{i=1}^{+\infty} E_i)) + \mu(A \cap (\cup_{i=1}^{+\infty} E_i)^c)$$

$\bigcirc$ **ESEMPIO di un insieme in R che non é Lebesgue misurabile**.

Sia $\quad A_x := (x + \mathbf{Q}) \cap [0, 1]. \qquad$ É

$$x - y \notin \mathbf{Q} \quad \Rightarrow \quad A_x \cap A_y \quad = \quad \emptyset, \qquad\qquad x - y \in \mathbf{Q} \quad \Rightarrow \quad A_x = A_y$$

Poi, dall'assioma della scelta:

$$\exists Z \subset \mathbf{R} \qquad \text{tale che} \qquad \forall\ x : \quad Z \cap A_x \qquad \text{é esattamente un punto.}$$

Proprietá di Z:

$$\cup_{q \in \mathbf{Q}}(Z + q) = \mathbf{R}, \qquad q_1 \neq q_2 \quad \Rightarrow \quad (Z + q_1) \cap (Z + q_2) = \emptyset$$

Sia poi $\quad \alpha : \mathbf{N} \to \mathbf{Q} \quad$ biiezione, $q_j := \alpha(j)$. $\quad$ Da

$$Ł^1(\mathbf{R}) \leq \sum_j L^1(Z + q_j) = \sum_j L^1(Z), \qquad \text{segue} \qquad L^1(Z) > 0$$

Sia infine $q_{j_k} \in [0, 1]\ \forall k \quad$ e quindi $\quad 2 = L^1([0, 2]) \geq L^1(\cup_1^n (Z + q_{i_k}))$.

Se Z fosse misurabile, lo sarebbero anche gli $Z + q_{j_k}$, e quindi risulterebbe

$$L^1(\cup_1^n (Z + q_{i_k})) = \sum_1^n L^1(Z + q_{j_k}) = nL(Z) \quad \text{e quindi} \quad n \leq \frac{2}{L^1(Z)} \qquad \forall n$$

contraddizione.

MISURE BORELIANE, di RADON

Sia $\ (X, d)\ $ spazio metrico, e sia $\ \mathcal{B} \subset \mathcal{P}\ (X)\ $ la piú piccola sigma algebra che contiene i chiusi di X. $\ \mathcal{B}$, intersezione di tutte le σ-algebre che contengono i chiusi di X, si chiama la sigma algebra dei boreliani di X.

Definizione 3.

Una misura (esterna) $\ \mu\ $ su $\ X\ $ si dice **misura boreliana** se $\ \mathcal{B} \subset \Sigma_\mu$.

Se di piú $\ \mu\ $ é finita sui compatti, $\ \mu\ $ si dice di Radon.

Definizione 4. Una misura (esterna) μ su X si dice **misura metrica** se

$$0 < d(A, B) \Rightarrow \mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$$

Proposizione 3: $\quad \mu$ **metrica** $\Rightarrow$ μ **boreliana**

Premettiamo il

Lemma . Siano μ misura metrica su (X,d), $\quad E_j \subset E_{j+1}\ \forall j$. $\quad$ Allora

$$d(E_{j+2} \setminus E_{j+1},\ E_j \setminus E_{j-1}) > 0 \quad \forall j \geq 2 \quad \Rightarrow \quad \mu(E_j) \to \mu(\cup_j E_j)$$

Prova del Lemma. $\qquad$ Possiamo supporre $\sup_j \mu(E_j) < +\infty$.

Siccome , dall'ipotesi ed essendo μ misura metrica,

$$\mu(E_2 \setminus E_1) + \ldots + \mu(E_{2n} \setminus E_{2n-1}) = \mu(\cup_{j=1}^n [E_{2j} \setminus E_{2j-1}]) \leq \mu(E_{2n}) \leq \sup_j \mu(E_j)$$

$$\mu(E_3 \setminus E_2) + \ldots + \mu([E_{2n+1} \setminus E_{2n}]) = \mu(\cup_{j=1}^n [E_{2j+1} \setminus E_{2j}]) \leq \mu(E_{2n+1}) \leq \sup_j \mu(E_j)$$

otteniamo $\quad \sum_j \mu([E_{j+1} \setminus E_j]) < +\infty \quad$ e quindi $\sum_{j\geq n} \mu([E_{j+1} \setminus E_j] \to_n 0$ e quindi

$$\mu(\cup_j E_j) \leq \mu(E_n) + \sum_{j\geq n} \mu([E_{j+1} \setminus E_j]) \ \forall n \quad \Rightarrow \quad \mu(\cup_j E_j) \leq \lim_n \mu(E_n)$$

$\to$ Gli E_j non si suppongono misurabili!

Prova della Proposizione 3. $\qquad$ Sia $C = \overline{C}$ un insieme chiuso.
Siano $A \subset C$, $\ B \subset C^c$. $\qquad$ Sia $B_n := \{x \in B : \ d(x,C) \geq \frac{1}{n}\}$.

Si ha che $B = \cup_n B_n$ perché $B \subset C^c$, e C^c é aperto. $\quad$ Inoltre

$$d(B_{j+2} \setminus B_{j+1}, B_j \setminus B_{j-1}) \geq \frac{1}{j} - \frac{1}{j+1} > 0 \quad \forall j \geq 2$$

Dal Lemma segue quindi che $\mu(B_n) \to \mu(B)$ e quindi

$$\mu(A \cup B) \geq \mu(A \cup B_n) = \mu(A) + \mu(B_n) \to \mu(A) + \mu(B)$$

Proposizione 4: $\quad L^N$ **é metrica e quindi boreliana**.

Infatti, sia $0 < \delta := d(A,B)$. $\quad$ Dato $\epsilon > 0$, siano R_j tali che

$$A \cup B \subset \cup_j R_j, \quad \mathrm{diam} R_j \leq \frac{\delta}{2}, \qquad \sum_j \mathrm{Vol} R_j \leq \mu(A \cup B) + \epsilon$$

Allora $\qquad \mu(A) + \mu(B) \leq \sum_{R_j \cap A \neq \emptyset} \mathrm{Vol} R_j + \sum_{R_j \cap B \neq \emptyset} \mathrm{Vol} R_j \leq \mu(A \cup B) + \epsilon.$

Proposizione 5. $\quad L^N$ **é borel regolare:**

$$\forall\ A \subset \mathbf{R}^N \quad \exists\ B \in \mathcal{B}: \qquad A \subset B \ \text{ e } \ L^N(A) = L^N(B)$$

Infatti $L^N(A) = L^N(\cap_j \cup_i R_{ij})$ con $A \subset \cup_i R_{ij}$, $\sum_i \mathrm{Vol}\, R_{ij} \leq L^N(A) + \frac{1}{j}$

Proposizione 6: $\quad A_j \subset A_{j+1} \ \Rightarrow\ L^N(A_j) \to L^N(\cup_j A_j)$

$\rightarrow$ gli A_j non sono supposti misurabili!

Verifica: siano $B_j \in \mathcal{B}$, $A_j \subset B_j$, tali che $L^N(A_j) = L^N(B_j)$.
É $A_n \subset \cap_{j\geq n} B_j$ e $\cap_{j\geq n} B_j$ é famiglia crescente (di misurabili). Dunque

$$L^N(\cup_n A_n) \leq L^N(\cup_n \cap_{j\geq n} B_j) = \lim L^N(\cap_{j\geq n} B_j) \leq \lim L^N(A_n)$$

Proposizione 7: Approssimazione mediante aperti, compatti

i) $\forall A \subset \mathbf{R}^N: \quad L^N(A) = \inf\{L^N(O): \quad A \subset O,\ O \text{ aperto } \}$

ii) $\forall E$ misurabile : $\quad L^N(E) = \sup\{L^N(K): \quad K \subset E, K \text{ compatto } \}$

La i) segue dal fatto che vol(R) = vol(int R).

(ii) Sia dapprima $E \subset B_r$ e sia O_j aperto tale che $\overline{B}_r \setminus E \subset O_j$, con

$$L^N(O_j) \leq L^N(\overline{B}_r \setminus E) + \frac{1}{j} = L^N(\overline{B}_r) - L^N(E) + \frac{1}{j} \qquad \text{e quindi} \qquad L^N(E) \leq$$

$$L^N(\overline{B}_r) - L^N(O_j) + \frac{1}{j} \leq L^N(\overline{B}_r) - L^N(O_j \cap \overline{B}_r) + \frac{1}{j} = L^N(\overline{B}_r \setminus O_j) + \frac{1}{j}$$

Dunque, $\quad K_j := \overline{B}_r \setminus O_j \quad$ é un compatto contenuto in E e $L^N(E) \leq L^N(K_j) + \frac{1}{j}$.

Nel caso generale, se B_n denota la palla di raggio n, $L^N(E \cap B_n) \to_n L^N(E)$. Quindi, se $K_n \subset E \cap B_n$ é compatto tale che $L^N(E \cap B_n) \leq L^N(K_n) + \frac{1}{n}$ si ha $L^N(E) \leq \lim_n L^N(K_n) \leq L^N(E)$.

$\bigcirc \rightarrow$!! Da ii) segue che , se $L^N(E) < +\infty$ ed E é misurabile allora

$(*) \qquad \forall\ \epsilon, \quad \exists K_\epsilon \subset E \subset O_\epsilon, K_\epsilon$ compatto, O_ϵ aperto : $L^N(O_\epsilon \setminus K_\epsilon) \leq \epsilon$

Viceversa, se vale $(*)$, E é misurabile: $E = (\cap_n O_{\epsilon_n}) \setminus (\cap_n O_{\epsilon_n} \setminus E)$ é differenza di misurabili perché $(\cap_n O_{\epsilon_n}) \setminus E \subset [\cap_n O_{\epsilon_n}] \setminus [\cup_n K_{\epsilon_n}] \Rightarrow L^N(\cap_n O_{\epsilon_n} \setminus E) = 0$ (dunque, A limitato e misurabile secondo Peano-Jordan $\Rightarrow$ misurabile secondo Lebesgue).

Esercizi e complementi 1

Misura di Hausdorff. Dati $s \geq 0$, $\delta > 0, A \subset \mathbf{R}^n$ sia

$$H^s_\delta(A) = inf\{\sum_{j=1}^{+\infty}(\text{diam } C_j)^s \ : \ A \subset \cup_{j=1}^{+\infty} C_j, \ C_j = \overline{C}_j, \ \text{diam} C_j \leq \delta\}$$

$$H^s(A) = \sup_{\delta > 0} H^s_\delta(A)$$

(i) Provare che H^s (misura di Hausdorff s-dimensionale) é misura boreliana.

(ii) $H^s(rA) = r^s H^s(A), \forall A \subset \mathbf{R}^n, \forall r > 0$

(iii) $H^s(A) < +\infty, t > s \Rightarrow H^t(A) = 0$ e $H^s(A) > 0, t < s \Rightarrow H^t(A) = +\infty$

Esercizio 1 . Sia X un insieme .

(i) Per ogni $A \subset X$, sia $\mu(A) =$ numero di elementi di A, se A é un insieme finito, $\mu(A) = +\infty$ se A non é finito (μ é "misura che conta") . Provare che μ é una misura sull'insieme delle parti di X.

(i) Dato $X_0 \subset X$, sia $\delta_{X_0}(E) = 1$ se $E \cap X_0 \neq \emptyset$, $\delta_{X_0}(E) = 0$ se $E \cap X_0 = \emptyset$. Provare che δ_{X_0} è una misura su X e $\Sigma_\mu = \{E : \ X_0 \subset E \text{ op. } \ E \subset X_0^c\}$.

Esercizio 2. Dato X, sia Σ una σ- algebra di sottoinsiemi di X, $\mu : \Sigma \to [0, +\infty]$ misura, e sia $\hat{\mu}(E) = \inf\{\sum \mu(A_j) : E \subset \cup A_j, A_j \in \Sigma\}$. Provare che
(i) $\hat{\mu}$ è misura (esterna) su X, (ii) $\Sigma \subset \Sigma_{\hat{\mu}}$,
(iii) $\hat{\mu}$ é Σ-regolare: $\forall A \subset X, \ \exists E \in \Sigma : \ A \subset E, \ \hat{\mu}(A) = \mu(E)$

Suggerimento: $E \in \Sigma, A \subset \cup_j A_j, \ A_j \in \Sigma \Rightarrow \sum_j \mu(A_j) \geq \hat{\mu}(A \cap E) + \hat{\mu}(A \setminus E)$...

Esercizio 3. Sia $A \subset \mathbf{R}$, $L^1(A) > 0$. Provare che esiste $E \subset A$ che non é L^1-misurabile.
Suggerimento. Cominciare col provare che $Z_0 \subset Z, \ L^1(Z_0) > 0 \Rightarrow Z_0$ *non é misurabile (Z é il noto esempio di insieme non misurabile..). Provare quindi che* $0 < L^1(A \cap (Z + q_j))$ *per qualche* j

Esercizio 4. Mostrare che non é sempre vero che

$$E_j \subset \mathbf{R}, \ E_{j+1} \subset E_j, L^1(E_1) < +\infty \Rightarrow L^1(E_j) \to L^1(\cap_j E_j)$$

Suggerimento. Da $\cap_n \cup_{j \geq n} (Z + q_j) = \emptyset$... *ove Z é come sopra..*