AM5-2008: Tracce delle lezioni- 1

MISURE.

Dato un insieme X, una famiglia Σ di sottoinsiemi di X si chiama **σ-algebra** se

$$(i)\ \ \emptyset\in\Sigma, \qquad (ii)\ \ E\in\Sigma\Rightarrow E^c\in\Sigma, \qquad (iii)\ \ E_j\in\Sigma\Rightarrow\cup_{j=1}^{+\infty}E_j\in\Sigma$$

Una funzione $\mu:\Sigma\to[0,+\infty]$, si chiama **misura** se: $\quad \mu(\emptyset)=0 \quad$ e

(numerabile additivitá) $\qquad E_j\in\Sigma,\quad E_i\cap E_j=\emptyset\quad\forall i\neq j \qquad \Rightarrow$

$$\mu(\cup_{j=1}^{+\infty}E_j) \;=\; \sum_{j=1}^{+\infty}\mu(E_j)$$

!! →!! $\qquad A_j\in\Sigma\ \Rightarrow\ \cap_jA_j=(\cup_jA_j^c)^c\in\Sigma, \qquad A,B\in\Sigma\ \Rightarrow\ A\setminus B=A\cap B^c\in\Sigma$

Proposizione 1. Sia $\mu:\Sigma\to[0,+\infty]$ misura. Allora

(i) $\ A,B\in\Sigma,\ A\subset B\ \Rightarrow\ \mu(A)\le\mu(B)$

(ii) $\ A,B\in\Sigma,\ A\subset B,\ \ \mu(A)<+\infty\ \Rightarrow\ \ \mu(B\setminus A)=\mu(B)-\mu(A)$

(iii) $\ E_j\in\Sigma,\ E_j\subset E_{j+1}\ \ \forall j\ \Rightarrow\ \mu(E_j)\to\mu(\cup_{j=1}^{+\infty}E_j)$ $\quad$ (in modo crescente)

(iv) $\ E_j\in\Sigma,\ E_{j+1}\subset E_j\ \ \ \forall j,\ \mu(E_1)<+\infty\ \Rightarrow\ \mu(E_j)\to\mu(\cap_{j=1}^{+\infty}E_j)$

Prova. $\qquad$ (i)-(ii): $\ B=(B\setminus A)\cup A\Rightarrow\mu(B)=\mu(B\setminus A)+\mu(A)$

(iii) $\ $ Ovvio se $\mu(E_j)=+\infty$ per qualche j. Sia dunque $\mu(E_j)<+\infty\ \ \forall j$. Scriviamo $E_0:=\emptyset$. É $\ \cup_{j=0}^{+\infty}E_j=\cup_{j=1}^{+\infty}[E_{j+1}\setminus E_j]$ $\ $ unione disgiunta e quindi

$$\mu(\cup_{j=1}^{+\infty}E_j)=\sum_{j=1}^{\infty}\mu(E_{j+1}\setminus E_j)=\lim_n\sum_{j=0}^{n}\mu(E_{j+1}\setminus E_j)=\lim_n\mu(E_{n+1})$$

(iv) $\quad E_1\setminus\cap_jE_j=\cup_j(E_1\setminus E_j)$ $\quad$ unione crescente e $\quad \mu(E_1)<+\infty \qquad \Rightarrow$

$$\mu(E_1)-\mu(\cap_iE_i)=\mu(E_1\setminus\cap_jE_j)=\mu(\cup_j[E_1\setminus E_j])=\lim_n\mu(E_1\setminus E_j)$$

$$=\mu(E_1)-\lim_n\mu(E_j)$$

Definizione 1: Misure "esterne" (generazione di misure).

Dato un insieme X, sia $\mathcal{P}\ (X) := \{A :\ A \subset X\}$ l'insieme delle parti di X. Una funzione $\mu : \mathcal{P}\ (X) \to [0, +\infty]$, si chiama misura (esterna), se $\mu(\emptyset) = 0$ e

$$A \subset \cup_{j=1}^{+\infty} A_j \ \Rightarrow\ \mu(A) \leq \sum_{j=1}^{+\infty} \mu(A_j) \qquad \textbf{(numerabile subadditivitá)}$$

$! \to !$ μ é monotona: $A \subset B \quad \Rightarrow \quad \mu(A) \leq \mu(B)$.

Esempi: le misure (esterne) di Lebesgue e di Hausdorff in $\mathbf{R}^N$

Misura di Lebesgue. Qui $R = I_1 \times \ldots \times I_N$, I_j intervalli in $\mathbf{R}$, denota un rettangolo in $\mathbf{R}^N$, e $\mathrm{Vol}(R) = l(I_1) \times \ldots \times l(I_N)$ $(0\ \infty := 0)$ é il suo volume ($l(I)$:= lunghezza di I). La misura di Lebesgue L^N é definita dalla posizione:

$$L^N(A) \ := \ \inf\{\sum_1^{+\infty} \mathrm{Vol}(R_j) \ :\ A \subset \cup_j R_j\}, \quad A \subset \mathbf{R}^N$$

Nota che $L^N(R) = \mathrm{Vol}(R)$. L^N é misura (esterna). Infatti, dato $A \subset \cup_j A_j$, e supposto $\mu(A_j) < \infty\ \ \forall j$, sia $A_j \subset \cup_i R_{ij}$ con $\sum_i \mathrm{Vol}(R_{ij}) \leq L^N(A_j) + \frac{\epsilon}{2^j}$. Allora $A \subset \cup_{ij} R_{ij}$ e quindi $L^N(A) \leq \sum_{ij} \mathrm{Vol}(R_{ij}) \leq 2\epsilon + \sum_j L^N(A_j)$.

Invarianza per traslazione, N-omogeneitá.

Ricordiamo che se $A \subset \mathbf{R}^N, h \in \mathbf{R}^N, t > 0$, $A + h := \{x + h|\ x \in A\}$, $tA := \{tx|\ x \in A\}$ sono rispettivamente il traslato di A lungo h, il dilatato di A (di coefficente t). Da $\mathrm{vol}(R + h) = \mathrm{vol}\ (R)$, $\mathrm{vol}\ (tR) = t^N\ \mathrm{vol}\ (R)$, segue che

$$L^N(A + h) \ = \ L^N(A), \qquad L^N(tA) \ = \ t^N L^N(A) \quad \forall A \subset \mathbf{R}^N, \quad h \in \mathbf{R}^N,\ t \geq 0$$

Misura di Hausdorff. Dati $s \geq 0$, $\delta > 0$, $A \subset \mathbf{R}^n$, siano

$$H^s_\delta(A) \ := \ \inf\ \{\sum_{j=1}^{+\infty} (\mathrm{diam}\ C_j)^s \ :\ \ A \subset \cup_{j=1}^{+\infty} C_j, \ \ C_j = \overline{C}_j, \ \ \mathrm{diam} C_j \leq \delta\}$$

$$H^s(A) \ := \ \sup_{\delta > 0}\ H^s_\delta(A)$$

H^s é misura (esterna) (detta di Hausdorff s-dimensionale).

Come sopra, $H^s(A + h) = h^s(A)$, $H^s(tA) = t^s H^s(A)$.

Definizione 2: Insiemi misurabili. Sia μ misura (esterna) su X. Diremo che

$E \subset X$ è μ-misurabile se $\qquad \mu(A) = \mu(A \cap E) + \mu(A \cap E^c), \qquad \forall A \subset X$

o, equivalentemente, $\qquad A \subset E, \;\; B \subset E^c \quad \Rightarrow \quad \mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$

Σ_μ denoterá la classe dei μ-misurabili.

$! \rightarrow !$(i) $\quad \mu(E) = 0 \Rightarrow E \in \Sigma_\mu$.

$! \rightarrow !$(ii) $\quad E \subset \mathbf{R}^n$ é (Lebesgue) misurabile $\Rightarrow E + h, \quad tE$ sono (Lebesgue) misurabili .

Proposizione 2 : $\mu_{|\Sigma_\mu}$ **é una misura**

(i) $E_j \in \Sigma_\mu, \;\; E_i \cap E_j = \emptyset \;\; \forall \; i \neq j \;\Rightarrow\; \mu(\cup_{j=1}^{+\infty} E_j) = \sum_{j=1}^{+\infty} \mu(E_j)$

(ii) Σ_μ è una σ-algebra

Prova di (i): $\quad E \in \Sigma_\mu, \quad A \cap E = \emptyset \quad \Rightarrow \quad \mu(A \cup E) = \mu(A) + \mu(E)$. Dall'ipotesi segue quindi $\mu(\cup_{i=1}^n E_i) = \sum_1^n \mu(E_i), \;\; \forall n$ e quindi

$$\sum_1^{+\infty} \mu(E_i) \;\geq\; \mu(\cup_{i=1}^{+\infty} E_i) \;\geq\; \mu(\cup_{i=1}^n E_i) \;=\; \sum_1^n \mu(E_j) \quad \forall n$$

Prova di (ii) : $\quad$ Ovviamente $\emptyset \in \Sigma_\mu$ e $\; E \in \Sigma_\mu$ se e solo se $E^c \in \Sigma_\mu$. Poi

$$E_1, \; E_2 \in \Sigma_\mu \;\Rightarrow\; \mu(A) = \mu(A \cap E_1) + \mu(A \cap E_1^c \cap E_2) + \mu(A \cap E_1^c \cap E_2^c) =$$

$$= \mu(A \cap (E_1 \cup E_2)) + \mu(A \cap (E_1 \cup E_2)^c) \;\Rightarrow\; E_1 \cup E_2 \in \Sigma_\mu$$

In particolare, $\; E, F \in \Sigma_\mu \;\Rightarrow\; E \setminus F = (E^c \cup F)^c \in \Sigma_\mu$ e quindi $F_1 := E_1$ e $F_{n+1} := E_{n+1} \setminus \cup_{j=1}^n E_j$ sono misurabili, chiaramente tra loro disgiunti e, infine $\cup_{j=1}^n F_j = \cup_{j=1}^n E_j$ Sostituendo eventualmente gli E_n con gli F_n, possiamo supporre gli E_j tra loro disgiunti.
Ora, dalla misurabilitá di $\cup_{j=1}^n E_j$ segue che $\mu(A) \geq \mu(A \cap (\cup_1^n E_i)) + \mu(A \cap (\cup_{i=1}^{+\infty} E_i)^c)$.
Ma, essendo gli E_j misurabili e disgiunti, é $\mu(A \cap (E_1 \cup E_2)) = \mu(A \cap E_1) + \mu(A \cap E_2)$ e quindi, iterando, $\mu(A \cap (\cup_1^n E_j)) = \sum_{i=1}^n \mu(A \cap E_i)$. Dunque , passando al limite

$$\mu(A) \geq \sum_{i=1}^{+\infty} \mu(A \cap E_i) + \mu(A \cap (\cup_{i=1}^{+\infty} E_i)^c) \geq \mu(A \cap (\cup_{i=1}^{+\infty} E_i)) + \mu(A \cap (\cup_{i=1}^{+\infty} E_i)^c)$$

$\bigcirc$ **ESEMPIO di un insieme in R che non é Lebesgue misurabile**.

Sia $\quad A_x := (x + \mathbf{Q}) \cap [0, 1]. \qquad$ É

$$x - y \notin \mathbf{Q} \quad \Rightarrow \quad A_x \cap A_y \quad = \quad \emptyset, \qquad\qquad x - y \in \mathbf{Q} \quad \Rightarrow \quad A_x = A_y$$

Poi, dall'assioma della scelta:

$$\exists Z \subset \mathbf{R} \qquad \text{tale che} \qquad \forall\ x : \qquad Z \cap A_x \qquad \text{é esattamente un punto.}$$

Proprietá di Z:

$$\cup_{q \in \mathbf{Q}}(Z + q) = \mathbf{R}, \qquad q_1 \neq q_2 \quad \Rightarrow \quad (Z + q_1) \cap (Z + q_2) = \emptyset$$

Sia poi $\quad \alpha : \mathbf{N} \to \mathbf{Q} \quad$ biiezione, $q_j := \alpha(j). \quad$ Da

$$Ł^1(\mathbf{R}) \leq \sum_j L^1(Z + q_j) = \sum_j L^1(Z), \qquad \text{segue} \qquad L^1(Z) > 0$$

Sia infine $q_{j_k} \in [0, 1]\ \forall k \quad$ e quindi $\quad 2 = L^1([0, 2]) \geq L^1(\cup_1^n(Z + q_{i_k}))$.

Se Z fosse misurabile, lo sarebbero anche gli $Z + q_{j_k}$, e quindi risulterebbe

$$L^1(\cup_1^n(Z + q_{i_k})) = \sum_1^n L^1(Z + q_{j_k}) = nL(Z) \quad \text{e quindi} \quad n \leq \frac{2}{L^1(Z)} \quad \forall n$$

contraddizione.

MISURE BORELIANE, di RADON

Sia $\ (X, d)\ $ spazio metrico, e sia $\ \mathcal{B} \subset \mathcal{P}\ (X)\ $ la piú piccola sigma algebra che contiene i chiusi di X. $\ \mathcal{B}$, intersezione di tutte le σ-algebre che contengono i chiusi di X, si chiama la sigma algebra dei boreliani di X.

Definizione 3.

Una misura (esterna) $\ \mu\ $ su $\ X\ $ si dice **misura boreliana** se $\ \mathcal{B} \ \subset \Sigma_\mu$.

Se di piú $\ \mu\ $ é finita sui compatti, $\ \mu\ $ si dice di Radon.

Definizione 4. Una misura (esterna) μ su X si dice **misura metrica** se

$$0 < d(A, B) \Rightarrow \mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$$

Proposizione 3: μ **metrica** $\Rightarrow$ μ **boreliana**

Premettiamo il

Lemma . Siano μ misura metrica su (X, d), $E_j \subset E_{j+1}$ $\forall j$. Allora

$$d(E_{j+2} \setminus E_{j+1}, \; E_j \setminus E_{j-1}) > 0 \quad \forall j \geq 2 \quad \Rightarrow \quad \mu(E_j) \rightarrow \mu(\cup_j E_j)$$

Prova del Lemma. Possiamo supporre $\sup_j \mu(E_j) < +\infty$.

Siccome , dall'ipotesi ed essendo μ misura metrica,

$$\mu(E_2 \setminus E_1) + \ldots + \mu(E_{2n} \setminus E_{2n-1}) = \mu(\cup_{j=1}^n [E_{2j} \setminus E_{2j-1}]) \leq \mu(E_{2n}) \leq \sup_j \mu(E_j)$$

$$\mu(E_3 \setminus E_2) + \ldots + \mu([E_{2n+1} \setminus E_{2n}]) = \mu(\cup_{j=1}^n [E_{2j+1} \setminus E_{2j}]) \leq \mu(E_{2n+1}) \leq \sup_j \mu(E_j)$$

otteniamo $\sum_j \mu([E_{j+1} \setminus E_j]) < +\infty$ e quindi $\sum_{j \geq n} \mu([E_{j+1} \setminus E_j] \rightarrow_n 0$ e quindi

$$\mu(\cup_j E_j) \leq \mu(E_n) + \sum_{j \geq n} \mu([E_{j+1} \setminus E_j]) \; \forall n \quad \Rightarrow \quad \mu(\cup_j E_j) \leq \lim_n \mu(E_n)$$

$\rightarrow$ Gli E_j non si suppongono misurabili!

Prova della Proposizione 3. Sia $C = \overline{C}$ un insieme chiuso.
Siano $A \subset C$, $B \subset C^c$. Sia $B_n := \{x \in B : \; d(x, C) \geq \frac{1}{n}\}$.

Si ha che $B = \cup_n B_n$ perché $B \subset C^c$, e C^c é aperto. Inoltre

$$d(B_{j+2} \setminus B_{j+1}, B_j \setminus B_{j-1}) \geq \frac{1}{j} - \frac{1}{j+1} > 0 \quad \forall j \geq 2$$

Dal Lemma segue quindi che $\mu(B_n) \rightarrow \mu(B)$ e quindi

$$\mu(A \cup B) \geq \mu(A \cup B_n) = \mu(A) + \mu(B_n) \rightarrow \mu(A) + \mu(B)$$

Proposizione 4: L^N **é metrica e quindi boreliana**.

Infatti, sia $0 < \delta := d(A, B)$. Dato $\epsilon > 0$, siano R_j tali che

$$A \cup B \subset \cup_j R_j, \quad \text{diam} R_j \leq \frac{\delta}{2}, \quad \sum_j \text{Vol} R_j \leq \mu(A \cup B) + \epsilon$$

Allora $\mu(A) + \mu(B) \leq \sum_{R_j \cap A \neq \emptyset} \text{Vol} R_j + \sum_{R_j \cap B \neq \emptyset} \text{Vol} R_j \leq \mu(A \cup B) + \epsilon.$

Proposizione 5. L^N **é borel regolare:**

$$\forall \ A \subset \mathbf{R}^N \quad \exists \ B \in \mathcal{B} : \qquad A \subset B \ \text{ e } \ L^N(A) = L^N(B)$$

Infatti $L^N(A) = L^N(\cap_j \cup_i R_{ij})$ con $A \subset \cup_i R_{ij}$, $\sum_i \text{Vol}\, R_{ij} \leq L^N(A) + \frac{1}{j}$

Proposizione 6: $A_j \subset A_{j+1} \ \Rightarrow \ L^N(A_j) \to L^N(\cup_j A_j)$

$\to$ gli A_j non sono supposti misurabili!

Verifica: siano $B_j \in \mathcal{B}$, $A_j \subset B_j$, tali che $L^N(A_j) = L^N(B_j)$.
É $A_n \subset \cap_{j \geq n} B_j$ e $\cap_{j \geq n} B_j$ é famiglia crescente (di misurabili). Dunque

$$L^N(\cup_n A_n) \leq L^N(\cup_n \cap_{j \geq n} B_j) = \lim L^N(\cap_{j \geq n} B_j) \leq \lim L^N(A_n)$$

Proposizione 7: Approssimazione mediante aperti, compatti

i) $\forall A \subset \mathbf{R}^N$: $L^N(A) = \inf\{L^N(O) : \ A \subset O, \ O \text{ aperto } \}$

ii) $\forall E$ misurabile : $L^N(E) = \sup\{L^N(K) : \ K \subset E, K \text{ compatto } \}$

La i) segue dal fatto che vol(R) = vol(int R).

(ii) Sia dapprima $E \subset B_r$ e sia O_j aperto tale che $\overline{B}_r \setminus E \subset O_j$, con

$$L^N(O_j) \leq L^N(\overline{B}_r \setminus E) + \frac{1}{j} = L^N(\overline{B}_r) - L^N(E) + \frac{1}{j} \qquad \text{e quindi} \qquad L^N(E) \leq$$

$$L^N(\overline{B}_r) - L^N(O_j) + \frac{1}{j} \leq L^N(\overline{B}_r) - L^N(O_j \cap \overline{B}_r) + \frac{1}{j} = L^N(\overline{B}_r \setminus O_j) + \frac{1}{j}$$

Dunque, $K_j := \overline{B}_r \setminus O_j$ é un compatto contenuto in E e $L^N(E) \leq L^N(K_j) + \frac{1}{j}$.

Nel caso generale, se B_n denota la palla di raggio n, $L^N(E \cap B_n) \to_n L^N(E)$. Quindi, se $K_n \subset E \cap B_n$ é compatto tale che $L^N(E \cap B_n) \leq L^N(K_n) + \frac{1}{n}$ si ha $L^N(E) \leq \lim_n L^N(K_n) \leq L^N(E)$.

$\bigcirc \to$!! Da ii) segue che , se $L^N(E) < +\infty$ ed E é misurabile allora

$$(*) \qquad \forall \ \epsilon, \quad \exists K_\epsilon \subset E \subset O_\epsilon, K_\epsilon \ \text{ compatto, } \ O_\epsilon \text{ aperto : } \ L^N(O_\epsilon \setminus K_\epsilon) \leq \epsilon$$

Viceversa, se vale $(*)$, E é misurabile: $E = (\cap_n O_{\epsilon_n}) \setminus (\cap_n O_{\epsilon_n} \setminus E)$ é differenza di misurabili perché $(\cap_n O_{\epsilon_n}) \setminus E \subset [\cap_n O_{\epsilon_n}] \setminus [\cup_n K_{\epsilon_n}] \Rightarrow L^N(\cap_n O_{\epsilon_n} \setminus E) = 0$ (dunque, A limitato e misurabile secondo Peano-Jordan $\Rightarrow$ misurabile secondo Lebesgue).

Esercizi e complementi 1

Misura di Hausdorff. Dati $s \geq 0,\ \delta > 0, A \subset \mathbf{R}^n$ sia

$$H^s_\delta(A) = inf\{\sum_{j=1}^{+\infty}(\text{diam } C_j)^s\ :\ A \subset \cup_{j=1}^{+\infty} C_j,\ C_j = \overline{C}_j,\ \text{diam} C_j \leq \delta\}$$

$$H^s(A) = \sup_{\delta > 0} H^s_\delta(A)$$

(i) Provare che H^s (misura di Hausdorff s-dimensionale) é misura boreliana.

(ii) $H^s(rA) = r^s H^s(A), \forall A \subset \mathbf{R}^n, \forall r > 0$

(iii) $H^s(A) < +\infty, t > s \Rightarrow H^t(A) = 0$ e $H^s(A) > 0, t < s \Rightarrow H^t(A) = +\infty$

Esercizio 1 . Sia X un insieme .

(i) Per ogni $A \subset X$, sia $\mu(A)$ = numero di elementi di A, se A é un insieme finito, $\mu(A) = +\infty$ se A non é finito (μ é "misura che conta") . Provare che μ é una misura sull'insieme delle parti di X.

(i) Dato $X_0 \subset X$, sia $\delta_{X_0}(E) = 1$ se $E \cap X_0 \neq \emptyset$, $\delta_{X_0}(E) = 0$ se $E \cap X_0 = \emptyset$. Provare che δ_{X_0} è una misura su X e $\Sigma_\mu = \{E :\ X_0 \subset E \text{ op. } E \subset X_0^c\}$.

Esercizio 2. Dato X, sia Σ una σ- algebra di sottoinsiemi di X, $\mu : \Sigma \to [0, +\infty]$ misura, e sia $\hat{\mu}(E) = \inf\{\sum \mu(A_j) : E \subset \cup A_j, A_j \in \Sigma\}$. Provare che
(i) $\hat{\mu}$ è misura (esterna) su X, (ii) $\Sigma \subset \Sigma_{\hat{\mu}}$,
(iii) $\hat{\mu}$ é Σ-regolare: $\forall A \subset X,\ \exists E \in \Sigma :\ A \subset E,\ \hat{\mu}(A) = \mu(E)$

Suggerimento: $E \in \Sigma, A \subset \cup_j A_j,\ A_j \in \Sigma \Rightarrow \sum_j \mu(A_j) \geq \hat{\mu}(A \cap E) + \hat{\mu}(A \setminus E)$...

Esercizio 3. Sia $A \subset \mathbf{R},\ L^1(A) > 0$. Provare che esiste $E \subset A$ che non é L^1-misurabile.
Suggerimento. Cominciare col provare che $Z_0 \subset Z,\ L^1(Z_0) > 0 \Rightarrow Z_0$ *non é misurabile (*Z *é il noto esempio di insieme non misurabile..). Provare quindi che* $0 < L^1(A \cap (Z + q_j))$ *per qualche* j

Esercizio 4. Mostrare che non é sempre vero che

$$E_j \subset \mathbf{R},\ E_{j+1} \subset E_j, L^1(E_1) < +\infty \Rightarrow L^1(E_j) \to L^1(\cap_j E_j)$$

Suggerimento. Da $\cap_n \cup_{j \geq n} (Z + q_j) = \emptyset$... *ove* Z *é come sopra..*

AM5 2008: Tracce delle lezioni- 2

FUNZIONI MISURABILI, SOMMABILI

Siano X un insieme , $\Sigma \subset \mathcal{P}\ (X)$ sigma algebra . Una $f : X \to [-\infty, +\infty]$ é **funzione misurabile** se vale una delle (tra loro equivalenti) affermazioni

$$(i) \quad \{x \in X : f(x) \leq c\} \in \Sigma \ \ \forall c \in \mathbf{R} \quad (ii) \quad \{x \in X : \ f(x) > c\} \in \Sigma \ \forall c \in \mathbf{R}$$

$$(iii) \quad \{f(x) < c\} \in \Sigma \ \forall c \in \mathbf{R} \quad (iv) \quad \{f(x) \geq c\} \in \Sigma \ \ \forall c \in \mathbf{R}$$

Nota. Se μ é **misura completeta**, cioé $N_0 \subset N \in \Sigma$, $\mu(N) = 0 \Rightarrow N_0 \in \Sigma$, allora f misurabile, $\mu(\{x : g(x) \neq f(x)\}) = 0 \quad \Rightarrow \quad g$ é misurabile.

Esempi. χ_A, funzione caratteristica di un insieme A, ovvero $\chi_A(x) := 1 \quad \forall x \in A, \quad \chi_A(x) := 0 \quad \forall x \in A^c$ é misurabile se e solo se $A \in \Sigma$.

Sia $X = \mathbf{R}^N$ e Σ la classe dei boreliani. Se f é inferiormente/superiormente semicontinua (cioé $f^{-1}((-\infty, c])$ é chiuso/$f^{-1}((-\infty, c))$ é aperto, per ogni $c \in \mathbf{R}$) allora f é **(borel) misurabile**.

Proposizione 1. Siano $f, \ g : X \to (-\infty, +\infty)$ misurabili. Allora

(i) $tf + sg, t, s \in \mathbf{R}$, fg, $f^+(x) := \max\{f(x), 0\}$, $f^-(x) := \max\{-f(x), 0\}$, $|f|$ sono misurabili; $\frac{1}{f}$ é misurabile se $\mu(\{f = 0\}) = 0$.

(ii) f_n misurabili $\Rightarrow$ $\inf_n f_n(x)$, $\sup_n f_n(x)$, $\liminf_n f_n(x)$, $\limsup_n f_n(x)$ sono misurabili

Verifica di (i): La misurabilitá di tf, $\frac{1}{f}$ segue subito dalla definizione. Poi, $f + g$ é misurabile perché

$$\{f + g < c\} \quad = \quad \cup_{\{r,s \in \mathbf{Q}, \ r+s<c\}}(\{f < r\} \cap \{g < s\}) \in \Sigma$$

Infatti, $f(x) + g(x) < c \quad \Rightarrow \quad f(x) < \frac{c}{2} + \frac{f(x)-g(x)}{2} \quad \Rightarrow \quad \exists \ r \in \mathbf{Q}$: $f(x) < r < \frac{c}{2} + \frac{f(x)-g(x)}{2}$. Analogamente, $\exists s \in \mathbf{Q}$: $g(x) < s < \frac{c}{2} + \frac{g(x)-f(x)}{2}$ (ció prova "$\subset$"; l'altra inclusione é ovvia).

Si vede poi subito che f misurabile $\Rightarrow f^2$ é misurabile, e quindi $fg = \frac{(f+g)^2-(f-g)^2}{4}$ é misurabile, e quindi $f^+ = f\chi_{\{f \geq 0\}}$, $f^- = -f\chi_{\{f \leq 0\}}$, $|f| = f^+ + f^-$ sono misurabili

Verifica di (ii): $\{x : \ \inf_n f_n(x) \geq c\} \quad = \quad \cap_n\{x : \ f_n(x) \geq c\} \in \Sigma$, $\{x : \ \sup_n f(x \leq c\} \quad = \quad \cap_n\{x : \ f_n(x) \leq c\} \in \Sigma$, $\liminf_n f_n(x) = \sup_n[\inf_{k \geq n} f_k(x)]$, $\limsup_n f_n(x) = \inf_n[\sup_{k \geq n} f_k(x)]$.

Proposizione 2. Sia $f \geq 0$. Allora

$$f(x) \quad = \quad \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j} \; \chi_{E_j}(x) \qquad\qquad \forall x \in X \qquad\qquad \text{ove (induttivamente)}$$

$$E_1 := \ \{x : f(x) \geq 1\}, \quad E_n := \ \{x : \ f(x) \geq \ \textstyle\sum_{j=1}^{n-1} \ \frac{\chi_{E_j}}{j} \ + \ \frac{1}{n}\}, \qquad n \in N.$$

Dimostrazione. Posto $g(x) := \sum_j \frac{1}{j}\chi_{E_j}$, proviamo che $f \equiv g$.

É $f(x) \geq g(x)$. Infatti:

$$x \notin \cup_j E_j \quad \Rightarrow \quad g(x) = 0 = f(x)$$
$$x \in E_n \setminus \ \cup_{k\geq n+1} E_k \quad \Rightarrow \quad f(x) \geq \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\chi_{E_j}(x)}{j} + \frac{1}{n} \ \geq \ \sum_{j=1}^{n} \frac{\chi_{E_j}(x)}{j} \ = \ g(x)$$
$$x \in E_{j_k}, j_k \to +\infty \ \Rightarrow \ f(x) \geq \sum_{j=1}^{j_k-1} \frac{\chi_{E_j}(x)}{j} \ \ \forall k \ \Rightarrow \ f(x) \geq \sum_{j}^{+\infty} \frac{1}{j}\chi_{E_j}(x) \ = \ g(x)$$

É $f(x) \leq g(x)$. Infatti, $g(x) < +\infty \Rightarrow$

$$\exists j_k \to +\infty : \ x \notin E_{j_k} \ \Rightarrow \ f(x) \leq \sum_{j=1}^{j_k-1} \frac{\chi_{E_j}}{j} + \frac{1}{j_k} \leq g(x) + \frac{1}{j_k} \ \Rightarrow \ f(x) \leq g(x)$$

FUNZIONI SEMPLICI. Sia μ misura su $(X, \ \Sigma)$; ϕ misurabile si dice semplice se $\phi(X)$ é al piú numerabile. Si ha (rappresentazione "canonica" di ϕ):

$$\phi \ = \sum_{t\in[-\infty,+\infty]} t\chi_{\{\phi=t\}} \ = \ \sum_i t_i\chi_{A_i}, \quad A_i := \{\phi = t_i\} \in \Sigma \ \text{disgiunti}, \ \ \cup_i A_i = X$$

INTEGRALE DI UNA FUNZIONE SEMPLICE. Sia $\phi \geq 0$ semplice.

$$\int \phi \ = \ \int_X \phi \ \ d\mu \ \ := \ \ \sum_t t \, \mu(\{\phi = t\}) = \int_0^{\infty} \mu(\{\phi > t\})dt \ \ \text{(integrale di Riemann)}$$

Nota. Siano $\phi = \sum_i t_i \chi_{A_i}$ (rappr. can.) $B_j \in \Sigma : \ B_i \cap B_j = \emptyset \ \ \forall i \neq j$. Allora

(i) $\cup_j B_j = X \ \Rightarrow \ \sum_i t_i\chi_{A_i} = \sum_{ij} t_i \ \chi_{A_i\cap B_j}$, $\quad \int_X \phi = \ \sum_{ij} t_i\mu(A_i \cap B_j)$

(ii) $\int_X \phi = 0 \ \Leftrightarrow \ \mu(\{\phi \neq 0\}) = 0$ (diremo che $\phi = 0$ **quasi ovunque (q.o.)**)

(iii) $\mu(N) = 0 \ \Rightarrow \ \int \phi\chi_{N^c} = \ \ \sum_j t_j\mu(E_j \cap N^c) = \sum_j t_j\mu(E_j) \ \ = \int \ \phi$

Proposizione 3. Siano $\phi, \ \psi \ \geq \ 0$ semplici. Allora

$$(i) \ \phi \leq \psi \Rightarrow \int \phi \leq \int \psi \qquad (ii) \ \int \phi + \psi \ = \ \int \phi \ + \ \int \psi, \ \ \int t\phi \ = \ t\int \phi, \ \ \forall t \geq 0$$

INTEGRALE DI UNA FUNZIONE MISURABILE NON NEGATIVA.

Sia $f \geq 0$ misurabile. Definiamo

$$\int f \ := \ \int_X f \, d\mu \ := \sup\{\int \phi : \quad 0 \ \leq \ \phi \ \leq \ f, \quad \phi \text{ semplice}\}$$

Nota. Per $f = \phi$ semplice, le Definizioni 2 e 3 coincidono.

Proposizione 4. Siano $f \leq g$ misurabili e non negative. Allora $\int f \leq \int g$

Nota. (i) $\int f = 0 \ \Rightarrow \ \mu(\{f \neq 0\} = 0$. Infatti: $\int f = 0, \ \phi \leq f \ \Rightarrow$ $\int \phi = 0 \Rightarrow \ \phi = 0$ q.o.. Dalla Prop. 2: $\exists \phi_j \leq f, \ \phi_j \to f$ e quindi $f = 0$ q.o..

(ii) $\mu(N) = 0 \ \Rightarrow \ \int f \chi_{N^c} = \int f.$ Infatti, $\int f \chi_{N^c} \leq \int f$ mentre $\phi \leq f \ \Rightarrow \ \int \phi = \int \phi \chi_{N^c} \ \leq \ \int f \chi_{N^c} \ \Rightarrow \ \int f \ \leq \ \int f \chi_{N^c}$

Teorema di Beppo Levi (o della convergenza monotona)

Siano f_n funzioni misurabili, tali che $0 \leq f_n(x) \leq f_{n+1}(x), \ \forall n \in \mathbf{N}, \ \forall x$. *Allora*

$$\lim_{n \to +\infty} \int f_n = \int \lim_{n \to +\infty} f_n$$

Dimostrazione. Posto $f(x) := \lim_n f_n(x)$, proviamo che $\lim \int f_n \ \geq \ \int f$,

ovvero
$$0 \leq \phi \leq f, \quad \phi \quad \text{semplice} \quad \Rightarrow \quad \int \phi \leq \lim \int f_n$$

Posto $E := \{x : \ \phi(x) = +\infty\}$, se $\mu(E) > 0$, allora $\lim \int f_n = +\infty$. Infatti,

$$E_n^M := \{x \in E : \ f_n(x) \geq M\} \subset E_{n+1}^M \,, \qquad \cup_n E_n^M = E \qquad \forall \ M > 0$$

perché $f_n(x) \leq f_{n+1}(x) \quad \forall x, n$ e $f_n(x) \to +\infty \quad \forall x \in E$. Quindi,

$$\int f_n \geq \int f_n \chi_{E_n^M} \geq M\mu(E_n^M) \ \Rightarrow \ \lim \int f_n \ \geq \ M\mu(E) \quad \forall M > 0$$

Sia quindi $\phi = \sum_j t_j \chi_{E_j} \leq f$, $t_j < +\infty \ \forall j$. Allora, $0 < t < 1$, $\varphi(x) > 0 \ \Rightarrow$ $\lim_n f_n(x) > t\varphi(x) \ \Rightarrow \ A_n^t := \{x : \ f_n(x) \geq t\varphi(x)\} \subset A_{n+1}^t$ e $\cup_n A_n^t = X \ \Rightarrow$

$$\int f_n \ \geq \ \int f_n \chi_{A_n^t} \ \geq \ t \int \varphi \chi_{A_n^t} \geq t \sum_{j=1}^k t_j \mu(A_n^t \cap E_j) \to t \sum_{j=1}^k t_j \mu(E_j) \quad \forall k \ \Rightarrow$$

$$\lim \int f_n \geq t \int \phi \quad \forall t < 1 \ \Rightarrow \ \lim \int f_n \geq \int \phi$$

Nota. Si puó supporre $0 \leq f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$, $\forall n \in \mathbf{N}$, $\forall x \notin Z$, $\mu(Z) = 0$. Basterá sostituire alle f_n le $f_n\chi_Z$.

Corollario. Siano f, g, f_j funzioni misurabili non negative, $t \geq 0$. Allora

$$(i) \quad \int f + g = \int f + \int g, \quad \int tf = t \int f \quad \forall t \geq 0$$

$$(ii) \quad \int \sum_1^\infty f_j = \sum_1^\infty \int f_j$$

(i) Dalla Proposizione 2: $\exists \varphi_j \leq f$, $\psi_j \leq g$ successioni crescenti di funzioni semplici non negative tali che $\varphi_j \to f$, $\psi_j \to g$. Da Beppo Levi, segue che

$$\int f + g = \lim_j \int \varphi_j + \psi_j = \lim (\int \varphi_j + \int \psi_j) = \int f + \int g$$

(ii) $\sum_1^n f_j \to \sum_1^\infty f_j$ in modo crescente implica

$$\sum_1^\infty \int f_j = \lim_n \sum_1^n \int f_j = \lim_n \int \sum_1^n f_j = \int \lim_n \sum_1^n f_j = \int \sum_1^\infty f_j$$

Il Lemma di Fatou. $f_n \geq 0$ *misurabili* $\Rightarrow$ $\underline{\lim} \int f_n \geq \int \underline{\lim} f_n$

Prova: $\int f_n \geq \int \inf_{k \geq n} f_k \Rightarrow \underline{\lim} \int f_n \geq \underline{\lim} \int \inf_{k \geq n} f_k$ e, siccome $\inf_{k \geq n} f_k$ converge in modo crescente a $\underline{\lim} f_n$, dal Teorema di B. Levi segue $\lim \int \inf_{k \geq n} f_k = \int \underline{\lim} f_n$.

Il teorema di Lebesgue (o della convergenza dominata).

Siano $f_n \geq 0$ funzioni misurabili convergenti puntualmente a zero . Allora

$$\exists \ g \geq 0 \ \textit{misurabile} : \int_X g < +\infty \quad e \quad f_n(x) \leq g(x) \ \forall n, \quad \Rightarrow \quad \int f_n \to 0$$

Prova. Sia $h_n(x) = g(x) - f_n(x)$. É $\int h_n + \int f_n = \int g < +\infty$. Da Fatou:

$$\int g - \overline{\lim} \int f_n = \underline{\lim} [\int g - \int f_n] = \underline{\lim} \int h_n \geq \int g \quad \text{e cioé} \quad 0 \geq \overline{\lim} \int f_n \leq 0$$

Nota. L'ipotesi di 'equidominatezza' é essenziale.

Ad esempio, $\chi_{[n,n+1]}(x) \to 0 \ \forall x \in \mathbf{R}$ ma $\int_{\mathbf{R}} \chi_{[n,n+1]} = 1 \quad \forall n$.

Un altro esempio é dato dai **cambiamenti di scala** . Se $f : \mathbf{R}^N \to \mathbf{R}$, sia $f_n(x) := n^N f(nx)$. Siccome $\int_{\mathbf{R}^N} n^N \chi_E(nx)\,dx = n^N L^N(\frac{1}{n}E) = L^N(E)$ é $\int_{\mathbf{R}^N} f_n = \int_{\mathbf{R}^N} f$. Se allora, ad esempio, $f \in C_0(\mathbf{R}^N)$, si ha $f_n(x) \to 0 \quad \forall x \neq 0$ ma $\int_{\mathbf{R}^N} f_n = \int_{\mathbf{R}^N} f$.

SOMMABILITÁ. f misurabile si dice sommabile se $\int |f| < \infty$.

In tal caso $\int_X f \;:=\; \int_X f^+ - \int_X f^-$.

Proposizione 5. Siano f, g sommabili, $t, s \in \mathbf{R}$. Allora

(i) $tf + sg$ é sommabile e $\int tf + sg = t\int f + s\int g$

(ii) $f \leq g, \quad \Rightarrow \int f \leq \int g$. In particolare, $|\int f| \leq \int |f|$

(iii) $\int |f| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \{f \neq 0\}$ ha misura nulla (f é nulla q. o.)

(iv) $\mu(\{|f| = +\infty\}) = 0$

(v) $\{|f| \neq 0\}$ é $\sigma-$**finito**, cioé

esistono E_j misurabili e di misura finita tali che $\{|f| \neq 0\} \subset \cup_j E_j$

Prova di (i). $(f+g)^+ - (f+g)^- \;=\; f+g \;=\; (f^+ - f^-) + (g^+ - g^-) \quad \Rightarrow$

$$(f+g)^+ + f^- + g^- \;=\; (f+g)^- + f^+ + g^+ \qquad \Rightarrow$$

$$\int (f+g)^+ + \int f^- + \int g^- \;=\; \int (f+g)^- + \int f^+ + \int g^+ \qquad \Rightarrow$$

$$\int f+g = \int (f+g)^+ - \int (f+g)^- \;=\; \int f^+ - \int f^- + \int g^+ - \int g^- = \int f + \int g$$

Prova di (iii). φ indica una funzione semplice: $\int |f| = 0 \quad \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (0 \leq \varphi \leq |f| \Rightarrow \int \varphi = 0) \Leftrightarrow (0 \leq \varphi \leq |f| \Rightarrow \mu(\{\varphi \neq 0\} = 0) \Leftrightarrow \mu(\{|f| \neq 0\} = 0$$

Prova di (iv). $\int |f| \geq \int |f| \;\; \chi_{\{|f| \geq n\}} \;\geq\; n\,\mu(\{|f| \geq n\}) \;\Rightarrow$

$$\mu(\{|f| = +\infty\}) \;\leq\; \mu(\{|f| \geq n\}) \;\leq\; \frac{1}{n}\int |f| \quad \forall n \in \mathbf{N}$$

Prova di (v). $\{f \neq 0\} = \cup_n \{|f| \geq \frac{1}{n}\}$ e $\int |f| \geq \int |f| \;\chi_{\{|f| \geq \frac{1}{n}\}} \geq \frac{1}{n}\mu(\{|f| \geq \frac{1}{n}\})$.

Definizione. Se f é sommabile ed E é misurabile, $\int\limits_E f := \int\limits_X f \chi_E$

Proposizione 6. Sia f sommabile. Allora

(i) $A \subset B$, A, B misurabili $\Rightarrow \int\limits_A |f| \leq \int\limits_B |f|$

(ii) $\int\limits_{\{f \geq c\}} f \geq c \ \mu(\{f \geq c\}) \ \forall c$

(iii) $(\inf_A f) \ \mu(A) \leq \int_A f \leq (\sup_A f) \ \mu(A)$

(iv) $A_j \in \Sigma, \ A_i \cap A_j = \emptyset \ \forall i \neq j \Rightarrow \int_{\cup_j A_j} f = \sum_j \int_{A_j} f$

(v) $A_j \in \Sigma, \ A_j \subset A_{j+1} \ \forall j \Rightarrow \int_{A_j} f \to \int_{\cup_j A_j} f$

(vi) $A_j \in \Sigma, \ A_{j+1} \subset A_j \ \forall j \Rightarrow \int_{A_j} f \to \int_{\cap_j A_j} f$

Prova di (iv)-(v)-(vi). $A_i \cap A_j = \emptyset \ \forall i \neq j \Rightarrow \chi_{\cup_j A_j} = \sum_j \chi_{A_j} \Rightarrow f \chi_{\cup_j A_j} = \lim_n \sum_{j=1}^n f \chi_{A_j}$ e $|\sum_{j=1}^n f \ \chi_{A_j}| \leq |f|$. Dal teorema di Lebesgue,

$$\int_{\cup_j A_j} f = \int f \chi_{\cup_j A_j} = \int \lim_n \sum_{j=1}^n f \chi_{A_j} = \lim_n \sum_{j=1}^n \int_{A_j} f = \sum_{j=1}^{\infty} \int_{A_j} f$$

Analogamente, $\chi_{A_j} \to \chi_{\cup_j A_j}$, $\chi_{A_j} \to \chi_{\cap_j A_j}$, $|f \chi_{A_j}| \leq |f| \Rightarrow$

$$\int_{\chi_{A_j}} f = \int f \chi_{A_j} \to \int f \chi_{\cup_j A_j} = \int_{\chi_{\cup_j A_j}} f \quad \text{e} \quad \int_{\chi_{A_j}} f = \int f \chi_{A_j} \to \int f \chi_{\cap_j A_j} = \int_{\chi_{\cap_j A_j}} f$$

Assoluta continuitá dell'integrale: *Sia f sommabile. Allora*

(i) $\forall \epsilon > 0, \ \exists \ \delta_\epsilon > 0 : \ \mu(A) \leq \delta_\epsilon \Rightarrow \int_A |f| \leq \epsilon$

(ii) $\forall \epsilon > 0, \ \exists A_\epsilon : \ \mu(A_\epsilon) < \infty$ *e* $\int_{A_\epsilon^c} |f| \leq \epsilon$

Prova. (i) Per assurdo: $\exists \epsilon_0 > 0, \ \exists A_j$ tali che $\mu(A_j) \leq \frac{1}{2^j}$ e $\int_{A_j} |f| \geq \epsilon_0$. Se $B := \cap_n \cup_{j \geq n} A_j$, risulta $\mu(B) = 0$ e $\int_B |f| = \lim_n \int_{\cup_{j \geq n} A_j} |f| \geq \epsilon_0$, contraddizione.

(ii) É $\{|f| > 0\} = \cup A_n, \ A_n := \{|f| \geq \frac{1}{n}\}$, $\mu(A_n) < \infty$, $\int |f| = \lim \int_{A_n} |f|$. Dunque, $\exists n_\epsilon :$ $\epsilon + \int_{A_{n_\epsilon}} |f| \geq \int |f| = \int_{A_{n_\epsilon}} |f| + \int_{A_{n_\epsilon}^c} |f|$.

Esercizi e complementi 2

Funzioni misurabili e sommabilità

Una Formula di rappresentazione. Sia $f \geq 0$ misurabile in (X, Σ, μ). Provare che $t \to \mu(\{f > t\})$ é Riemann integrabile in $[0, M]$ $\forall M > 0$ e che

$$\int_X f \, d\mu \;=\; \int_0^\infty \mu(\{f > t\}) \, dt$$

Esercizio 1. Provare che f misurabile $\Rightarrow f^{-1}(B) \in \Sigma \quad \forall B \subset \mathbf{R}$ Boreliano.

Esercizio 2. Sia f_n una successione di funzioni misurabili. Provare che l'insieme $\{x : \exists \lim_{n\to+\infty} f_n(x)\}$ è misurabile.

Funzioni misurabili, sommabili secondo Lebesgue in $\mathbf{R}^N$.

Teorema di Lusin. Sia $A \subset \mathbf{R}^N$ Lebesgue misurabile e di misura finita, f misurabile. Allora

$$\forall \epsilon > 0, \;\exists K_\epsilon \subset A \text{ compatto } : L^N(A \setminus K_\epsilon) < \epsilon \text{ e } \; f_{|K_\epsilon} \text{ é continua}$$

Nel seguito risulteranno utili i seguenti: **Insieme di Cantor, funzione di Cantor**

Dato un intervallo chiuso $I = [a, b]$, l'intervallo aperto $J := (a + \frac{b-a}{3}, b - \frac{b-a}{3})$ é "intervallo centrale", $I_1 = [a, a + \frac{b-a}{3}]$, $I_2 = [b - \frac{b-a}{3}, b]$ sono i "restanti". Iterando, a partire da $I_0 = [0, 1]$ l'operazione di "selezione" dell'intervallo centrale, si trova

$$[0,1] = O \cup C, \qquad O := \cup_{n=1}^{\infty} \cup_{j=1}^{2^{n-1}} J_{nj}, \qquad C := \cap_{n=1}^{\infty} \cup_{j=1}^{2^n} I_{nj}$$

ove J_{nj}, I_{nj} sono intervalli aperti (risp. chiusi) di lunghezza $\frac{1}{3^n}$, per cui

$$L^1(\cup_{j=1}^{2^n} I_{nj}) = (\frac{2}{3})^n, \qquad L^1(C) = 0, \qquad L^1(O) = 1$$

L'insieme C é **"insieme di Cantor"**.

Sia $$g_n(t) = (\frac{3}{2})^n \sum_1^{2^n} \chi_{I_{nj}}, \qquad f_n(x) = \int_0^x g_n(t) dt$$

Da $|f_{n+1}(x) - f_n(x)| \leq \frac{1}{2^n} \quad \forall x \in [0,1])$ segue che f_n converge uniformemente, diciamo ad f.

Tale funzione é detta **funzione di Cantor**. Ecco alcune delle sue proprietá:

f é non decrescente, $f(0) = 0, f(1) = 1,$ $f \equiv cost.$ in J_{nj} $\forall \ n, j$

$f(O) = \{ \frac{k}{2^n} : \ k, n \in \mathbf{N} \}$. Dunque $f(O)$ é numerabile e $L^1(f(O)) = 0$

Dunque $L^1(f(C)) = 1$ (in particolare, C non é numerabile).

Esercizio 3. Sia $g(x) = \frac{x+f(x)}{2}$, $x \in [0,1]$, f funzione di Cantor.

Provare che g ha inversa continua e che $L^1(g(C)) = \frac{1}{2}$.

Esercizio 4. Sia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ localmente Lipschtziana. Provare che f trasforma insiemi di misura (di Lebesgue) nulla in insiemi di misura nulla.

Mostrare con un esempio che le funzioni continue non hanno, in generale, questa proprietà.

Esercizio 5. Provare la falsitá della seguente affermazione

f misurabile $E \subset \mathbf{R}$ Lebesgue misurabile $\Rightarrow$ $f(E)$ é Lebesgue misurabile.

Suggerimento. Se f é la funzione di Cantor, prendere $A \subset f(C)$ non misurabile (perché esiste?)...

Esercizio 6. Provare la falsitá della seguenti affermazioni

(i) f misurabile $E \subset \mathbf{R}$ Lebesgue misurabile $\Rightarrow f^{-1}(E)$ é Lebesgue misurabile.

Suggerimento. Sia $f = g^{-1}$, g come nell'esercizio 3 ed $E = g^{-1}(A)$, $A \subset g(C)$ non misurabile.

(ii) $L^1(E) = 0 \Rightarrow E$ é boreliano

(iii) L^1, ristretta alla σ-algebra dei boreliani, é misura completa

Esercizio 7. Siano f, g Lebesgue misurabili in $\mathbf{R}$. Provare che

$$g^{-1}(B) \text{ é boreliano se } B \text{ é boreliano} \Rightarrow g \circ f \text{ é misurabile}$$

e che la implicazione é falsa se g é soltanto misurabile.

Esercizio 8. Provare che ogni funzione monotona di $\mathbf{R}$ in se' é misurabile.

Esercizio 9. Sia $B := \{x \in \mathbf{R}^n : \|x\| \leq 1\}$. Calcolare, usando l'esercizio 3

$$I_p = \int_{\mathbf{R}^n} ||x||^{-p} \chi_B \qquad\qquad J_p = \int_{\mathbf{R}^n} ||x||^{-p} \chi_{B^c}$$

e concludere che

$$I_p < +\infty \quad \Leftrightarrow \quad p < n, \qquad\qquad J_p < +\infty \quad \Leftrightarrow \quad p > n$$

Esercizio 10. Sia f Lebesgue sommabile in $\mathbf{R}^N$, $f_h(x) := f(x-h),\ \ h \in \mathbf{R}^N$. Provare che

$$\int_{\mathbf{R}^N} f_h(x)dx \;=\; \int_{\mathbf{R}^N} f(x)dx$$

Suggerimento. Provarlo dapprima per le funzioni semplici..

Esercizio 11. Sia f sommabile in $\mathbf{R}$. Provare che

(i) $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(x+k)$ converge assolutamente quasi per ogni $x \in \mathbf{R}$

(ii) $g := \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(x+k)$ è 1-periodica e sommabile in $[a,b]$ $\forall a < b$

Suggerimento. Considerare $\sum_{-\infty}^{+\infty} \int_{\mathbf{R}} f_k \chi_{[0,1]},\ \ f_k(x) := \ f(x+k)$

Esercizio 12. Provare che la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} (\cos nx)^{n^4}$ converge quasi per ogni $x \in [-\pi, \pi]$ e diverge in un insieme denso in $[-\pi, \pi]$.

Suggerimento. Considerare $\sum_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos nx)^{n^4} dx$

Esercizio 13. Sia $n \to r_n$ biiezione di $\mathbf{N}$ su $\mathbf{Q}$.

Provare che $\sum_n \frac{1}{2^n \sqrt{|x-r_n|}} \;<\; \infty$ per quasi tutti gli $x \in \mathbf{R}$.
Suggerimento: Considerare $\int_a^b (\sum_n \frac{1}{2^n \sqrt{|x-r_n|}})\ \ a < b.$

Esercizio 14. Sia f misurabile e limitata in $\mathbf{R}^N$. Provare che

(i) $\int_{\mathbf{R}^N} |f| < +\infty$ se e solo se $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} L^N(\{x : |f(x)| \;>\; \frac{1}{2^n}\}) < +\infty$

Provare con un controesempio che l'implicazione $\Leftarrow$ è in generale falsa se f non si assume limitata.

Esercizio 15. Sia f misurabile e limitata in $\mathbf{R}^N$. Provare che

(ii) $\int |f| < +\infty \Rightarrow \sum_n L^N(\{|f| \ > \ n\}) < \infty$

Si puó prescindere dall'ipotesi di limitatezza? É vero il viceversa?

Esercizio 16. Sia f misurabile in $\mathbf{R}^N$ e nulla fuori di una palla. Provare che

$\int_{\mathbf{R}^N} |f| < +\infty$ se e solo se $\sum_{n=0}^{+\infty} 2^n L^N(\{x : |f(x)| \geq 2^n\}) < +\infty$

Provare con un controesempio che l'implicazione $\Leftarrow$ è in generale falsa se f non si assume a supporto compatto.

Esercizio 17. Sia μ misura su X, $E \subset X$ misurabile, $f : X \to \mathbf{R}$ misurabile, $p > 0$. Provare che

(i) $\mu(\{|f| \geq t\}) \ \leq \ \frac{1}{t^p} \int |f|^p$

(ii) $\int |f|^p < \infty \ \Rightarrow \ \mu(\{|f| \geq t\}) \ = \ \circ(\frac{1}{t^p})$

Provare con un esempio che $\mu(\{|f| \geq t\}) \ = \ \circ(\frac{1}{t^p})$ non implica $\int |f|^p < \infty$.

Suggerimento. Considerare $f(x) = \frac{1}{|x \log x|} \chi_{(0,\frac{1}{e})}$.

Esercizio 18. Siano f_n misurabili, $0 \leq f_{n+1}(x) \leq f_n(x)$ per ogni n e q.o. x.
Provare che $\quad \exists n : \ \int f_n < +\infty \quad \Rightarrow \quad \int f_n \to \int \lim f_n$
e che l'ipotesi $\quad \exists n : \ \int f_n < +\infty \quad$ é essenziale.

Esercizio 19. Provare che $\quad f_n(x) \to f(x) \quad \forall x \quad \Rightarrow \quad \int |f| \leq \sup \int |f_n|$

Esercizio 20. Sia μ la misura che conta su un certo insieme X. Provare che

$$(i) \qquad \int_X |f| \, d\mu \ = \ \sup\{\sum_{\alpha \in A} |f(\alpha)| : \quad A \subset X, \quad A \quad \text{finito}\}$$

$$(ii) \qquad \int_X |f| \, d\mu < +\infty \quad \Rightarrow \quad \{x : \ f(x) \neq 0\} \quad \text{é al piú numerabile}$$

Esercizio 21. Provare che se $\sum f_n(x)$ converge quasi per ogni x ed esiste g sommabile tale che $|\sum_1^n f_j(x)| \leq g(x)$ quasi per ogni x, allora $\sum f_n$ è sommabile e $\int \sum f_n = \sum \int f_n$.

CENNI DI SOLUZIONE

Prova della Formula di rappresentazione . Sia $\varphi = \sum_{j=1}^n t_j \chi_{E_j}$, $0 < t_1 < t_2 \ldots < t_n$. Allora

$\{x : \varphi(x) > t\} = \cup_{\{j:\ t_j > t\}} E_j$ e quindi $\int\limits_0^\infty \mu(\{\varphi > t\})dt =$

$$= t_1 \sum_{j=1}^n \mu(E_j) + (t_2 - t_1)\sum_{j=2}^n \mu(E_j) + \ldots + (t_n - t_{n-1})\mu(E_n) = \sum_{j=1}^n t_j \mu(E_j) = \int \varphi$$

Poi, se $\varphi_n \to f$, $\varphi_n \le \varphi_{n+1} \le f$, é $\{f > t\} = \cup_n \{\varphi_n > t\}$ unione crescente, e quindi $\mu(\{\varphi_n > t\}) \to \mu(\{f > t\})$ e quindi, per Beppo Levi,

$$\int_X f d\mu = \lim_n \int_X \varphi_n d\mu = \lim_n \int\limits_0^\infty \mu(\{\varphi_n > t\})dt = \int\limits_0^\infty \mu(\{f > t\})dt$$

Esercizio 1 Osservare che la preimmagine di un aperto é misurabile (ogni aperto in $\mathbf{R}$ é unione numerabile di intervalli aperti). Provare quindi che $\{A \subset \mathbf{R} : f^{-1}(A) \in \Sigma\}$ é sigma algebra.

Esercizio 2 $\{x : \exists \lim_n f_n(x)\} = \{x : \underline{\lim}_n f_n(x) = \overline{\lim}_n f_n(x)\}$

Dimostrazione del Teorema di Lusin. Dato $j \in \mathbf{N}$, siano I_{ij} intervalli disgiunti di lunghezza $\frac{1}{j}$ tali che $\cup_i I_{ij} = \mathbf{R}$. É $A = \cup_i A_{ij}$, $A_{ij} := A \cap f^{-1}(I_{ij})$ ($A_{ij} \cap A_{lj} = \emptyset$ se $i \neq l$!) .
Siano $K_{ij}^\epsilon \subset A_{ij}$ compatti tali che $L^N(A_{ij} \setminus K_{ij}^\epsilon) \le \frac{\epsilon}{2^{i+j+2}}$ ($K_{ij}^\epsilon \cap K_{lj}^\epsilon = \emptyset$ se $i \neq l$!).
Siano $g_j \equiv \alpha_{ij} \in I_{ij}$ in K_{ij}^ϵ. Le g_j sono continue su $\cup_{i=1}^n K_{ij}^\epsilon$ $\forall n$. Poi

$$L^N(A \setminus \cup_{i=1}^n K_{ij}^\epsilon) \to L^N(A \setminus \cup_{i=1}^\infty K_{ij}^\epsilon) \le \frac{\epsilon}{2^{j+1}} \Rightarrow \exists\ n_j :\ L^N(A \setminus \cup_{i=1}^{n_j} K_{ij}^\epsilon) \le \frac{\epsilon}{2^j}.$$

Posto allora $K^\epsilon := \cap_j \cup_{i=1}^{n_j} K_{ij}^\epsilon$, é $|g_j(x) - f(x)| < \frac{1}{j}$ $\forall x \in K^\epsilon$ e quindi f é continua su K^ϵ. Infine $L^N(A \setminus K) \le \sum_j L^N(A \setminus \cup_{i=1}^{n_j} K_{ij}^\epsilon) \le 2\epsilon$.

Esercizio 3 $\{x + f(x) :\ x \in J_{nj}\} = J_{nj} + c_{nj}$ se $f \equiv c_{nj}$ su J_{nj}. Dunque

$$L^1(g(O)) = \frac{1}{2}\sum_n \sum_{j=1}^{2^{n-1}} \frac{1}{3^n} = \frac{1}{4}\sum_{n=1}^\infty (\frac{2}{3})^n = \frac{1}{2} \quad \text{e quindi} \quad L^1(g(C)) = \frac{1}{2}$$

Esercizio 4 $|f(x) - f(y)| \le L\,|x - y| \ \Rightarrow\ l(f(I)) \le Ll(I)$ $\forall I$ intervallo .
Poi, se f é la funzione di Cantor, $L^1(f(C)) = 1$.

Esercizi 5-6-7 Sia g come nell' esercizio 3. Sia $A \subset g(C)$ non misurabile (tale A esiste perché $g(C)$ ha misura positiva!), e sia $E = g^{-1}(A)$. Si ha:

5 $E \subset C$ ha misura nulla ed é quindi misurabile, mentre $g(E) = A$ non é misurabile.

6-(i) Se $h := g^{-1}, h^{-1}(E) = g(E) = A$ non é misurabile.

6-(ii) Sia E come in 6-(i). Se E fosse boreliano, $A = g(E) = h^{-1}(E) =$ sarebbe misurabile.

6-(iii) Sia $L^1(E) = 0$ con E non boreliano. Sappiamo che esiste un boreliano di misura nulla che contiene E. Siccome E non é boreliano, $L^1_{\mathcal{B}}$ non é completa.

7 Il controesempio é : $\chi_E \circ h = \chi_{h^{-1}(E)} = \chi_A$ (h come in 8-9). L'affermazione é ovvia: $\{g > c\}$ boreliano $\Rightarrow f^{-1}(\{g > c\})$ misurabile.

Esercizio 9 $L^n(\{x \in B : \frac{1}{\|x\|^p} > t\}) = vol(B)t^{-\frac{n}{p}}$ se $t \geq 1$ e vale $vol(B)$ se $t \leq 1:$ $\quad p < n \Rightarrow I_p = vol(B)[1 + \int_1^\infty \frac{dt}{t^{\frac{n}{p}}}] = vol(B)\frac{n}{n-p}, \quad p \geq n \Rightarrow I_p = +\infty.$

Calcoli analoghi per J_p.

Esercizio 11 Per Beppo Levi e numerabile additivitá dell'integrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left[\sum_{-\infty}^{+\infty} |f(x+k)|\chi_{[0,1]}\right] dx = \sum_{-\infty}^{+\infty} \int_0^1 |f(x+k)|dx = \sum_{-\infty}^{+\infty} \int_k^{k+1} |f(t)|dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |f| < +\infty$$

Dunque $\sum_{-\infty}^{+\infty} |f(x+k)| < +\infty$ per quasi ogni $x \in [0, 1]$. Siccome $\sum_{-\infty}^{+\infty} |f(x+n+k)| = \sum_{-\infty}^{+\infty} |f(x + k)| \quad \forall n \in \mathbf{Z}$ é infatti $\sum_{-\infty}^{+\infty} |f(x + k)| < +\infty$ per quasi ogni $x \in \mathbf{R}$ e tale funzione é per l'appunto 1-periodica.

Infine $\int_0^1 | \sum_{-\infty}^{+\infty} f(x+k)|dx \leq \int_{\mathbf{R}} |f| < +\infty$ e quindi, per periodicitá, g é sommabile su ogni intervallo limitato.

Esercizio 12 Effettuando un cambio di variabile ed utilizzando la periodicitá del coseno, troviamo

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos nx)^{n^4} dx = \frac{1}{n} \int_0^{n\frac{\pi}{2}} (\cos t)^{n^4} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^{n^4} dt$$

Siccome $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^n dt = O(\frac{1}{\sqrt{n}})$, vediamo che $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^{n^4} dt = O(\frac{1}{n^2})$ e quindi, per Beppo Levi

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\sum_{-\infty}^{+\infty} (\cos nx)^{n^4}\right] dx = \sum_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos nx)^{n^4} dx < +\infty$$

Dunque $\sum_{-\infty}^{+\infty} (\cos nx)^{n^4} < +\infty$ quasi per ogni $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ ed infatti, per periodicitá, quasi per ogni x.

Infine la serie diverge in ogni $x = \frac{2k\pi}{l}, \ k, l \in \mathbf{N}$.

Esercizio 13. $\quad \int_{-M}^{M} \frac{dx}{\sqrt{|x-r_n|}}) \leq 8 \int_0^M \frac{dt}{\sqrt{t}} = 16\sqrt{M} \quad \Rightarrow$

$$\sum_n \int_{-M}^{M} \frac{1}{2^n\sqrt{|x-r_n|}} \leq 16\sqrt{M} \quad \Rightarrow \quad \int_{-M}^{M} [\sum_n \int_{-M}^{M} \frac{1}{2^n\sqrt{|x-r_n|}}]dx < \infty$$

$$\Rightarrow \quad \sum_n \frac{1}{2^n\sqrt{|x-r_n|}} < +\infty \qquad \text{q.o.}x$$

Esercizio 14 Sia $g(t) = L^N(\{|f| > t\})$, cosicché g é monotona decrescente e

$$(i) \int |f| = \int_0^\infty g(t)dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\frac{1}{2^n}}^{\frac{1}{2^{n-1}}} g + \int_1^\infty g, \quad g(\frac{1}{2^{n-1}})\frac{1}{2^n} \leq \int_{\frac{1}{2^n}}^{\frac{1}{2^{n-1}}} g \leq g(\frac{1}{2^n})\frac{1}{2^n}$$

Dunque $\int |f| \geq \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\frac{1}{2^n}}^{\frac{1}{2^{n-1}}} g \geq \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} g(\frac{1}{2^n})\frac{1}{2^n}$ mentre $\int_1^\infty g \leq g(1)\|f\|_\infty \Rightarrow$

$\int |f| \leq g(1)\|f\|_\infty + \sum_{n=1}^{\infty} g(\frac{1}{2^n})\frac{1}{2^n} \leq max\{1, \|f\|_\infty\} \sum_{n=0}^{\infty} g(\frac{1}{2^n})\frac{1}{2^n}$.

Controesempio: $f(x) = \frac{1}{x}\chi_{(0,1)}(x) \;\; x \in \mathbf{R}$.
É $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{2^n} L^1(\{f > \frac{1}{2^n}\}) = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{2^n} < +\infty$ ma l'integrale diverge.

(ii) $\int |f| = \int_0^\infty g \geq \sum_{n\geq 1} g(n)$ e quindi l'ipotesi di limitatezza non entra. Il viceversa é in generale falso: se $|f(x)| \leq 1 \;\; \forall x$ la serie converge (serie di zeri!) ma, in generale, $\int |f| = +\infty$.

Esercizio 15 Come sopra,

$$\int |f| = \int_0^1 g + \sum_{n=0}^{\infty} \int_{2^n}^{2^{n+1}} g \geq g(1) + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} 2^n g(2^n) \geq \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} 2^n g(2^n)$$

indipendentemente dal fatto che f sia a supporto comptto. Viceversa, se $f \equiv 0$ fuori della palla B_r, allora $L^N(\{|f| > 0\}) \leq vol(B_r)$ e quindi $g \leq vol(B_r)$ e quindi $\int |f| = \int_0^1 g + \sum_{n=0}^{\infty} \int_{2^n}^{2^{n+1}} g \leq vol(B_r) + \sum_{n=0}^{\infty} 2^n g(2^n)$.

Controesempio. $f(x) = \frac{1}{x}\chi_{[2,+\infty)}(x)$: la serie é una serie di zeri, ma l'integrale diverge.

Esercizio 16

$$(i-ii) \int_{\{|f|\geq t\}} |f|^p \geq t^p \mu(\{|f| \geq t\}) \Rightarrow \mu(\{|f| \geq t\}) \leq \frac{1}{t^p}\int_{\{|f|\geq t\}} |f|^p = \frac{1}{t^p} \circ (1)$$

perché $\int_{\{|f|\geq t\}} |f|^p \rightarrow_{t\rightarrow +\infty} \int_{\{|f|=+\infty\}} |f| = 0$ se $\int |f|^p < +\infty$.

AM5 2008: Tracce delle lezioni- 3

CONVERGENZA QUASI OVUNQUE, IN MISURA, IN MEDIA

Siano f_n, f funzioni misurabili in (X, Σ, μ). Diremo che f_n converge a f

quasi ovunque (q.o.) se $\quad \exists N \in \Sigma : \quad \mu(N) = 0 \;$ e $\; f_n(x) \to f(x) \quad \forall x \notin N$

in misura se $\quad \mu(\{x : |f_n(x) - f(x)| \geq \epsilon\}) \to_n 0 \qquad \forall \epsilon > 0$

in media se $\quad f_n, f$ sono sommabili e $\quad \int\limits_X |f_n - f| \, d\mu \to_n 0.$

Nota. Unicitá del limite: se f_n converge a f e a g q.o. (oppure in misura, oppure in media) allora $\quad \mu(\{x : |f(x) - g(x)| \neq 0\}) = 0$, (si dice $\; f = g \;$ q.o.)

Proposizione 1

(i) $\quad f_n \to f \quad$ in media $\quad \Rightarrow \quad f_n \to f \quad$ in misura

(ii) $\quad f_n \to f \quad$ q.o. $\quad \Rightarrow \quad f_n \to f$ in misura sugli insiemi di misura finita

(iii) $\quad f_n \to f \quad$ in misura $\quad \Rightarrow \quad \exists n_k : \quad f_{n_k} \to f$ quasi ovunque

Prova.

(i) Segue da: $\quad \int |f_n - f| \;\geq\; \epsilon\mu(\{|f_n - f| \geq \epsilon\})$

(ii) Sia $\; g_n := |f_n - f|$. É $\quad \{x \in A : \, g_n \to 0\} \;=\; \cap_j \cup_n \cap_{k \geq n} \{x \in A : \, g_k \leq \frac{1}{j}\}$. Quindi, $g_n \to 0 \quad q.o.$ in $A \quad \Leftrightarrow \quad \mu(\cup_j \cap_n \cup_{k \geq n} \{x \in A : \, g_k \,>\, \frac{1}{j}\}) = 0$. Quindi, se $g_n \to 0 \quad q.o.$ in A ed A é di misura finita, allora $\mu(\cup_{k \geq n} \{x \in A : \, g_k \,>\, \frac{1}{j}\}) \to_n 0$ per ogni j e quindi $f_n \to_n 0$ in misura su A.

(iii) Se $f_n \to_n 0$ in misura, é vero che $\quad \forall j, \; \exists n_j : \; \mu(\{g_n \geq \frac{1}{j}\}) \leq \frac{1}{2^j}$, $\;\forall n \geq n_j$. Siccome $\cup_{j \geq k}\{g_{n_j} \geq \frac{1}{j}\}$ é una successione decrescente di insiemi con $\mu(\cup_{j \geq k}\{g_{n_j} \geq \frac{1}{j}\}) \leq \sum_{j \geq k} \frac{1}{2^j} = \frac{1}{2^{k-1}}$, risulta $\mu(\cap_k \cup_{j \geq k} \{g_{n_j} \geq \frac{1}{j}\}) = 0$. Ma

$$x \notin \cap_k \cup_{j \geq k} \{g_{n_j} \geq \frac{1}{j}\} \quad \Rightarrow \quad \exists k : \quad j \geq k \quad \Rightarrow \quad g_{n_j}(x) \,<\, \frac{1}{j}$$

e quindi $\quad g_{n_j}(x) \to 0 \quad \forall x \notin \cap_k \cup_{j \geq k} \{g_{n_j} \geq \frac{1}{j}\}$.

Nota. Unicitá del limite: dalla Prop. segue che se f_n converge a f q.o., od, indifferentemente, in misura od in media, ed f_n convege a g q.o., od, indifferentemente, in misura od in media, allora $f = g$ q.o.

CONTROESEMPI

(i) La convergenza in misura (cosí come la convergenza q.o.) non implica la convergenza in media: $X = \mathbf{R}$ con la misura di Lebesgue e $f_n = n\chi_{(0,\frac{1}{n}]}$; f_n converge a zero in misura (e puntualmente), ma $\int_{\mathbf{R}} f_n = 1$.

(ii) La convergenza in misura non implica la convergenza q.o.: $f_{n,k} = \chi_{[\frac{k-1}{n},\frac{k}{n}]}$, ove, dato $, n \in \mathbf{N}$, k va da 1 fino ad n, converge a zero in misura ma non converge in alcun punto (in ogni punto il massimo limite é 1 ed il minimo limite é zero).

(iii) La convergenza puntuale non implica la convergenza in misura: $f_n = \chi_{[n,n+1]}$ converge a zero puntualmente (e, sugli intervalli limitati, anche in misura), ma non converge in misura su tutto $\mathbf{R}$.

Teorema 1 (Lebesgue) *Siano f_n sommabili. Se*
f_n é equidominata, esiste cioé g sommabile tale che $|f_n(x)| \leq g(x)$ quasi per ogni x
f_n converge ad f q.o., oppure in misura
allora f é sommabile ed f_n converge a f in media.

Prova. Se f_n converge ad f q.o., esiste N tale che
$\mu(N) = 0$, $|f_n(x) - f(x)| \to 0 \;\; \forall x \notin N$ e $|f_n(x) - f(x)| \leq 2g(x) \;\; \forall x \notin N$.
E ció assicura che $\int |f_n(x) - f(x)| = \int |f_n(x) - f(x)|\chi_{N^c} \to 0$.

Se invece f_n converge ad f in misura, una sua sottosuccessione converge anche q.o. e quindi in media. Se f_n non convergesse in media a f, esisterebbero n_k ed $\epsilon > 0$ tali che $\int |f_{n_k} - f| \geq \epsilon$, mentre anche f_{n_k} al pari di f dovrebbe avere una sottosuccessione convergente a f in media.

CONVERGENZA IN MISURA E TEOREMA DI VITALI

Abbiamo visto che se f é sommabile, allora

$$(i) \qquad \forall\, \epsilon > 0, \quad \exists \delta_\epsilon > 0 : \quad E \in \Sigma, \quad \mu(E) \leq \delta_\epsilon \quad \Rightarrow \quad \int_E |f| \leq \epsilon$$

$$(ii) \qquad \forall \epsilon > 0, \quad \exists E_\epsilon \in \Sigma : \;\; \mu(E_\epsilon) < \infty \quad \text{e} \quad \int_{E_\epsilon^c} |f| \leq \epsilon$$

Se $\int |f_n - f| \to 0$, le proprietá (i)-(ii) valgono (banalmente) **uniformemente** in n:

$$(k) \qquad \forall\, \epsilon > 0, \qquad \exists \delta_\epsilon > 0 : \quad E \in \Sigma, \qquad \mu(E) \le \delta_\epsilon \qquad \Rightarrow \qquad \sup_n \int_E |f_n| \;\le\; \epsilon$$

$$(kk) \qquad \forall \epsilon > 0, \qquad \exists E_\epsilon \in \Sigma : \qquad \mu(E_\epsilon) < \infty \qquad \text{e} \qquad \sup_n \int_{E_\epsilon^c} |f_n| \;\le\; \epsilon$$

Infatti,

$$\int_E |f_n| \;\le\; \int |f_n - f| + \int_E |f| \;\le\; 2\epsilon \quad \text{se} \quad n \ge n_\epsilon \quad \text{e} \quad \mu(E) \le \delta_{\epsilon,f}$$

mentre $\int_E |f_j| \;\le\; \epsilon$ per $j = 1, \ldots, n_\epsilon$ se $\mu(E) \le \delta_{\epsilon, f_1, \ldots, f_{n_\epsilon}}$.
Analogamente, se $\int_{E_\epsilon^c} |f| \;\le\; \frac{\epsilon}{2}$ allora

$$\int_{E_\epsilon^c} |f_n| \;\le\; \int_{E_\epsilon^c} |f_n - f| \;+\; \int_{E_\epsilon^c} |f| \;\le \epsilon \quad \text{se} \quad n \ge n_\epsilon$$

mentre $\int_{E_{j,\epsilon}^c} |f_j| \;\le\; \epsilon$ per $j = 1, \ldots, n_\epsilon$ per certi $E_{j,\epsilon}$ di misura finita e quindi, posto $F_\epsilon = E_\epsilon \cup_j E_{j,\epsilon}$ risulta $\int_{F_\epsilon^c} |f_n| \;\le\; \epsilon$.

TEOREMA DI CONVERGENZA DI VITALI .

Siano f_n sommabili e convergenti in misura ad f. Se valgono (k) e (kk), allora f é sommabile e $\int |f_n - f| \to 0$.

Prova. Dalla Prop. 1-(ii) e dal Lemma di Fatou segue che:

$\exists f_{n_k} \to_k f$ q.o. e quindi $\int_E |f| \;\le\; \underline{\lim} \int_E |f_{n_k}| \le \sup_n \int_E |f_n| \quad \forall E \in \Sigma$. Se

$\delta_\epsilon,\ E_\epsilon$ sono come in $(k)-(kk)$ e $A_{\epsilon,n} := \{x \in A_\epsilon : |f_n(x) - f(x)| \ge \frac{\epsilon}{\mu(A_\epsilon)}\}$ per cui

$\mu(A_{\epsilon,n}) \le \delta_\epsilon$ se $n \ge n_\epsilon$ ($f_n \to f$ in misura!) vediamo che f é sommabile, perché

$$\int |f| \le \int_{A_\epsilon^c \cup A_{\epsilon,n}} |f| + \int_{A_\epsilon \setminus A_{\epsilon,n}} |f - f_n| + \int_{A_\epsilon \setminus A_{\epsilon,n}} |f_n| \le 3\epsilon + \int_{A_\epsilon} |f_n| \quad \forall n \ge n_\epsilon$$

e, infine, $n \ge n_\epsilon \quad \Rightarrow$

$$\int |f_n - f| = \int_{A_\epsilon^c \cup A_{\epsilon,n}} |f_n - f| + \int_{A_\epsilon \setminus A_{\epsilon,n}} |f_n - f| \le 4\epsilon + \int_{A_\epsilon \setminus A_{\epsilon,n}} \frac{\epsilon}{\mu(A_\epsilon)} = 5\epsilon$$

NOTA. Nel Teorema di Vitali l'ipotesi 'f_n converge a f in misura' puó essere sostituita dalla 'f_n converge a f q.o., giacché la convergenza q.o. implica la convergenza in misura sull'insieme di misura finita A_ϵ.

COMPLETEZZA

Una successione di funzioni sommabili f_n soddisfa la condizione di Cauchy per la convergenza in media se

$$\forall \epsilon > 0\,, \qquad \exists n_\epsilon : \qquad n, m \geq n_\epsilon \quad \Rightarrow \quad \int |f_n - f_m| \leq \epsilon \tag{C}$$

Se f_n converge in media, f_n é necessariamente di Cauchy (i.e. soddisfa (C)). Viceversa, se f_n soddisfa (C) , allora f_n converge in media a una funzione sommabile f:

Teorema *Se* f_n *é una successione di funzioni sommabili, allora* f_n *converge in media se e solo se soddisfa la condizione di Cauchy* (C).

Dimostrazione. La necessitá é ovvia; proviamo la sufficenza. Da (C):

$$\exists n_k : \quad \int |f_{n_{k+1}} - f_{n_k}| \leq \frac{1}{2^k}$$

Posto $\quad g_k := f_{n_{k+1}} - f_{n_k}, \quad$ dal Teorema di B. Levi otteniamo

$$\int \left[\sum_k |g_k| \right] d\mu = \sum_k \left[\int |g_k| \, d\mu \right] = \sum_k \frac{1}{2^k} < +\infty \qquad \text{cioé}$$

$$g := \sum_k |g_k| \qquad \text{é sommabile e quindi finita q.o.,} \qquad \text{e quindi}$$

la serie $\sum_k g_k$ converge q.o., ovvero $\quad f(x) := \lim f_{n_k}$ esiste q.o. $\quad$ Inoltre,

$$|f_{n_k}| \leq |f_1| + g \quad \text{e quindi} \quad \int |f_{n_k} - f| \to 0 \quad \text{(convergenza dominata)}$$

Da (C): $\qquad \int |f_n - f| \leq \int |f_n - f_{n_k}| + \int |f_{n_k} - f| \leq \epsilon \quad$ se $\quad n, n_k \geq n_e$

NOTA. Dalla dimostrazione:

f_n di Cauchy $\Rightarrow \ \exists \ f_{n_k}$ equidominata e convergente quasi ovunque.

Definizione di $L^1(\mu)$. $\quad L^1(\mu) = \{[f] : \ \int |f| < \infty\}, \quad [f] := \{g : g = f \ \ q.o.\}$

Possiamo riformulare i fatti mostrati dicendo che

$$\rightarrow \qquad \|f\| := \int |f| \qquad \text{é una norma su} \qquad L^1(\mu)$$

$$\rightarrow \qquad (L^1, \|f\|) \qquad \text{é uno spazio di Banach}$$

SPAZI L^p

Sia μ misura su X, $p \geq 1$.

$$L^p = L^p(X,\mu) := \{f : X \to [-\infty,+\infty] \mid f \text{ é misurabile e } \int_X |f|^p \, d\mu < \infty\}$$

Siccome $\quad p \geq 1 \Rightarrow (\frac{|t|+|s|}{2})^p \leq \frac{|s|^p+|t|^p}{2} \quad \forall\, s,t \in \mathbf{R}$, $\quad$ é

$$f,\, g \in L^p \quad \Rightarrow \quad f+g \in L^p$$

e quindi, facilmente, L^p **é spazio vettoriale**. Nel seguito, non distingueremo L^p da L^p quozientato rispetto al sottospazio $N := \{f = 0 \ q.o.\}$.

$\rightarrow$ Se $X = \mathbf{N}$ e μ é la misura che conta, $l^p := L^p(X,\mu)$ é lo spazio delle successioni $a := (a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ di potenza p-esima sommabile con norma $\|a\| = [\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p]^{\frac{1}{p}}$

DISEGUAGLIANZE di HOLDER, di MINKOWSKII .

Siano f, g misurabili. Se $p \geq 1$, allora

$$(\int |f + g|^p)^{\frac{1}{p}} \leq (\int |f|^p)^{\frac{1}{p}} + (\int |g|^p)^{\frac{1}{p}} \qquad \textbf{(Minkowskii)}$$

Se $p,q > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ (i.e. p,q **sono 'esponenti coniugati'***), allora*

$$\int |f\, g| \leq (\int |f|^p)^{\frac{1}{p}} \ (\int |g|^q)^{\frac{1}{q}} \qquad \textbf{(Holder)}$$

Una elementare diseguaglianza di convessitá.

$$p,\, q > 1, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \quad \Rightarrow \quad s\,t \leq \frac{t^p}{p} + \frac{s^q}{q} \qquad \forall\ s,\, t \geq 0$$

Da $\frac{d}{dr}(\frac{r^p}{p} - r + \frac{1}{q}) = r^{p-1} - 1$ segue che $r = 1$ é punto di minimo assoluto. Da $\frac{r^p}{p} - r + \frac{1}{q} = 0$ in $r = 1$, segue $r \leq \frac{1}{p} r^p + \frac{1}{q}$ $\forall r > 0$. Scrivendo (se $s \neq 0$) $r = \frac{t}{s^{q-1}}$ si ottiene la diseguaglianza voluta.

Adesso Holder segue subito scrivendo $t = \frac{|f(x)|}{(\int |f|^p)^{\frac{1}{p}}}$, $s = \frac{|g(x)|}{(\int |g|^p)^{\frac{1}{p}}}$ e integrando.
Minkowskii segue da Holder:

$$\frac{1}{p} + \frac{p-1}{p} = 1 \quad \Rightarrow \quad |f+g|^p \leq |f+g|^{p-1}\ |f| + |f+g|^{p-1}\ |g|$$

$$\Rightarrow \quad \int |f+g|^p \ \leq \ (\int |f+g|^p)^{\frac{p-1}{p}} \ (\int |f|^p)^{\frac{1}{p}} \ + \ (\int |f+g|^p)^{\frac{p-1}{p}} \ (\int |g|^p)^{\frac{1}{p}}$$

COMPLETEZZA degli spazi L^p. Sia $p \geq 1$.

(i) $\|f\|_p := (\int_X |f|^p \, d\mu)^{\frac{1}{p}}$ é una norma su L^p.

(ii) L^p dotato di tale norma é uno **spazio di Banach**, ovvero

$$f_n \in L^p, \ \|f_n - f_m\|_p \to_{n,\, m \to \infty} 0 \ \Rightarrow \ \exists f \in L^p : \ \|f_n - f\|_p \to 0$$

Si prova esattamente come nel caso $p = 1$: sia $g_k := f_{n_k}$ tale che $\|g_{k+1} - g_k\|_p \leq \frac{1}{2^k}$. Posto $F_n := \sum_1^n |g_{k+1} - g_k|$, é $\|F_n\|_p \leq \sum_1^n \frac{1}{2^k} \leq 1 \quad \forall n$ e quindi $F(x) := \lim_n F_n$ é in L^p per il Teorema di Levi, e quindi

$$\sum_1^\infty |g_{k+1} - g_k| < +\infty \quad \text{q.o.}$$

$$f(x) := \lim_k [g_1 + (g_2 - g_1) + \ldots + (g_k - g_{k-1})] = \lim_k f_{n_k} \quad \text{esiste finito q.o.}$$

Inoltre $|f_{n_k}| \leq F + |g_1|$ e quindi $|f_{n_k}|^p$ é equidominata e quindi $\int |f_{n_k} - f|^p \to 0$.

Infine, essendo f_n di Cauchy in L^p, $\int |f_n - f|^p \to 0$.

DISEGUAGLIANZA di INTERPOLAZIONE .

Siano $1 \leq p \leq q$, $\theta \in [0,1]$ tale che $\frac{1}{r} = \frac{\theta}{p} + \frac{1-\theta}{q}$. Allora

$$f \in L^p \cap L^q \ \Rightarrow \ f \in L^r \ \forall r \in [p,q] \ \text{ e } \ \|f\|_r \leq \|f\|_p^\theta \, \|f\|_q^{1-\theta}$$

Infatti, $\frac{p}{\theta r}$ e $\frac{q}{(1-\theta)r}$ sono esponenti coniugati e quindi

$$\int |f|^r = \int |f|^{r\theta} \, |f|^{r(1-\theta)} \leq (\int |f|^p)^{\frac{r\theta}{p}} \, (\int |f|^q)^{\frac{r(1-\theta)}{q}}$$

DISEGUAGLIANZA di HOLDER GENERALIZZATA .

Siano $f \in L^p, g \in L^q$. Allora

$$\frac{1}{r} := \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \leq 1 \ \Rightarrow \ \|fg\|_r \leq \|f\|_p \, \|g\|_q$$

Basta applicare Holder con esponenti $\frac{p}{r}$ e $\frac{q}{r}$:

$$\int |f|^r \, |g|^r \leq (\int |f|^p)^{\frac{r}{p}} \, (\int |g|^q)^{\frac{r}{q}}$$

Esercizi e complementi 3

Teorema di Egoroff. Sia $\mu(X) < \infty$. Siano f_n misurabili. Allora,

$f_n(x) \to 0 \forall x \Rightarrow \forall \epsilon > 0, \exists A_\epsilon \text{misurabile} : \mu(A_\epsilon) \le \epsilon \,\text{e}\, f_n \to 0 \;\text{ uniformemente in} A \backslash A_\epsilon$

Suggerimento. Provare che $\forall j, \epsilon,\ \exists n(\epsilon, j):\ \mu(\cup_{n \ge n(\epsilon,j)} \{g_n \ge \frac{1}{j}\}) \le \frac{\epsilon}{2^j}$ *e considerare* $A_\epsilon := \cup_j \ \cup_{n \ge n(\epsilon,j)} \{g_n \ge \frac{1}{j}\}$

Convergenza in misura, q.o., in media

Esercizio 1. Sia $f_n(x) := |\sin(k_n x + t_n)|^{p_n},\ x \in (0, 2\pi),\ k_n \in \mathbf{N}, p_n \to +\infty$. Provare che f_n converge a zero in misura.

Sugg. Confrontare $L^1(\{x : |\sin(k_n x + t_n)|^{p_n} \ge \epsilon\})$ *con* $L^1(\{x : |\sin x|^{p_n} \ge \epsilon\}$

Esercizio 2. Discutere convergenza puntuale, uniforme, in media, in misura per

$(i) f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2},\ x \in (0,1),\quad f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2},\ x \in (1, +\infty)$

$(ii) f_n(x) = nxe^{-nx^2},\ x \in (0,1),\quad f_n(x) = nxe^{-nx^2},\ x \in (1, +\infty)$

$(iii) f_n(x) = \frac{n^2x^2}{n^4+x^2},\ x \in (1, +\infty)$

$(iv) f_n(x) = \frac{nx}{(1+n^2x^4)\log(n+1)}$

Esercizio 3. Siano f_n, g misurabili in $\mathbf{R}$, $|f_n(x)| \le g(x)$ per quasi tutti gli x. Provare che $L^1(\{g \ge \epsilon\}) < \infty \ \ \forall \epsilon > 0, \ \ f_n \to 0 \, q.o. \Rightarrow f_n \to 0$ in misura

Suggerimento. $L^1(\{|f_n| \ge \epsilon\}) \le L^1(\{|g(x)| \ge \epsilon\})$....

Esercizio 4. Sia $\Phi : \mathbf{N} \to \mathbf{Q} \cap [0,1]$ biiezione. Siano

$$\Phi(k) = \frac{m_k}{n_k}, m_k, n_k \quad \text{primi tra loro} \qquad f_k(x) = e^{-(m_k - n_k x)^2}, x \in [0,1]$$

Provare che f_k tende a zero in misura, mentre $\lim f_k(x)$ non esiste per alcun x.

Suggerimento. Trovare le x *che soddisfano la diseguaglianza* $(m_k - n_k x)^2 \le \log \frac{1}{\epsilon}$. *Usare poi il fatto che per ogni* x *esistono razionali* m_k, n_k *tali che* $|x - \frac{m_k}{n_k}| \le \frac{1}{n_k^2}$.

Considerare a parte il caso x razionale.

Esercizio 5. (i) Trovare f_n misurabili tali che $f_n \to 0$ in misura ma $\int |f_n| \geq 1$

(ii) Trovare f_n misurabili tali che $f_n \to 0$ q.o. ma $\int |f_n| \geq 1$

(iii) Trovare f_n misurabili tali che $f_n \to 0$ q.o. ma non in misura

(iv) Trovare $f_n : [0, 2] \to \mathbf{R}$ tali che $f_n(x) \to 0$ $\forall x$ ma non in misura
Suggerimento. $f_n = \chi_{\cup_{j\geq n}}(Z + q_j)$...

Esercizio 6 . Sia $\mu(X) < \infty$. Siano $f_n \geq 0$ funzioni sommabili. Provare che

$$\sup_n \int f_n < +\infty, \;\; f_n \to f \;\; q.o., \;\; \int_X f_n \, d\mu \;\; \to \;\; \int_X f \, d\mu \quad \Rightarrow \quad \|f_n - f\|_{L^1} \to 0$$

Suggerimento: $A_{n,\epsilon} := \{x : |f_n(x) - f(x)| \geq \epsilon\} \quad \Rightarrow$
$\int |f_n - f| \leq \int_{A_{n,\epsilon}} |f_n - f| + \epsilon\mu(X), \quad \circ(1) - \epsilon\mu(X) \leq \int_{A_{n,\epsilon}} f_n \leq \circ(1) + \epsilon\mu(X)$

Spazi L^p

Esercizio 1. Siano $p_i > 1$, $\frac{1}{p_1} + \ldots + \frac{1}{p_l} = \frac{1}{p} \leq 1$. Siano $f_1, \ldots, f_l$ misurabili. Provare che

$$(\int |f_1 \ldots f_l|^p)^{\frac{1}{p}} \leq (\int |f_1|^{p_1})^{\frac{1}{p_1}} \ldots (\int |f_l|^{p_l})^{\frac{1}{p_l}}$$

Esercizio 2 . Data f Lebesgue misurabile in $\mathbf{R}^n$, $t > 0$, sia $f_t(x) = f(tx)$. Provare che

(i) f_t è misurabile, (ii) $f \in L^p \Rightarrow f_t \in L^p$ e $||f_t||_p = t^{-\frac{n}{p}} ||f||_p$

Esercizio 3. Siano $f_n \in L^p(X)$ tali che $\sup_n \int_X |f_n|^p < +\infty$. Provare che

$\liminf |f_n| \in L^p$, mentre può accadere che $\int \limsup |f_n| = +\infty$.

Esercizio 4. Sia $\mu(X) < +\infty$. Siano $1 \leq s < t$. Provare che

(i) $f \in L^t \quad \Rightarrow \quad f \in L^s$, e l'inclusione $L^t \subset L^s$ è stretta

(ii) l'inclusione $L^t \subset L^s$ è falsa se $\mu(X) = +\infty$.

Esercizio 5. Sia f_n successione limitata in $L^p(\mathbf{R}^n)$, $p \geq 1$. Provare che

$$f_n \to f \quad q.o., \quad \int |f_n|^p \to \int |f|^p \quad \Rightarrow \quad \|f_n - f\|_p \to 0$$

Convergenza in media, q.o., in misura: cenni di soluzione

Esercizio 6 . Sia $\quad I := \int f, \quad A_{n,\epsilon} := \{x : |f_n(x) - f(x)| \geq \epsilon\}$. Intanto

$$\mu(X) < \infty, f_n \to f \quad q.o. \quad \Rightarrow \quad f_n \to f \quad \text{in misura} \quad \Rightarrow \quad \mu(A_{n,\epsilon}) \to_n 0$$

Quindi $\int_{A_{n,\epsilon}} f \to_n 0$ (assoluta continuitá dell'integrale) e quindi

$$\int |f_n - f| \leq \int_{A_{n,\epsilon}} |f_n - f| + \epsilon\mu(X) \leq 2\epsilon\mu(X) + \int_{A_{n,\epsilon}} f_n \quad \forall n \geq n_\epsilon. \quad \text{Ma} \quad \int_{A_{n,\epsilon}} f_n =$$

$$= I + \circ(1) - \int_{A^c_{n,\epsilon}} f_n \leq I + \circ(1) - \int_{A^c_{n,\epsilon}} (f - \epsilon) \leq \epsilon\mu(X) + \int_{A_{n,\epsilon}} f \leq 2\epsilon\mu(X) \quad \forall n \geq n_\epsilon$$

Esercizi sugli L^p: cenni di soluzione

Esercizio 2 . Se E é misurabile, allora $\quad A \subset tE, \quad B \subset tE^c \quad \Rightarrow$

$$\frac{1}{t}A \subset E, \ \frac{1}{t}B \subset E^c \ \Rightarrow \ \mu(A \cup B) = t^n \mu(\frac{1}{t}A \cup B) = t^n[\mu(\frac{1}{t}A) + \mu(\frac{1}{t}B)] = \mu(A) + \mu(B)$$

e quindi tE é misurabile.

Se E é misurabile, $\chi_E(tx) = \chi_{\frac{1}{t}E}$ é misurabile e $\int \chi_E(tx)d\mu(x) = \mu(\frac{1}{t}E) = (\frac{1}{t})^n \mu(E) = t^{-n} \int \chi_E$.

Se $0 \leq f$ é misurabile e $0 \leq \varphi_j \leq \varphi_{j+1} \leq f$, allora

$$\int f^p(tx)d\mu(x) = \lim_j \int \varphi_j^p(tx)d\mu(x) = t^{-n} \int f^p$$

Esercizio 6. Proviamo intanto che dal Lemma di Fatou segue che

$$f_n \to f \quad q.o., \quad \int |f_n|^p \to \int |f|^p \quad \Rightarrow \quad \overline{\lim_n} \int_E |f_n|^p \leq \int_E |f|^p \quad \forall E \quad \text{misurabile}$$

Infatti

$$\int |f|^p - \overline{\lim_n} \int_E |f_n|^p = \underline{\lim_n}[\int |f_n|^p - \int_E |f_n|^p] \geq \int_{E^c} |f|^p \ \Rightarrow \ \overline{\lim_n} \int_E |f_n|^p \leq \int_E |f|^p$$

Ció implica l'uniforme assoluta continuitá degli integrali:

$$\mu(E) \leq \delta_\epsilon \ \Rightarrow \ \sup_n \int_E |f_n|^p \leq \epsilon, \qquad \exists E_\epsilon \ \text{con} \ \mu(E_\epsilon) < +\infty : \quad \sup_n \int_{E_\epsilon^c} |f_n|^p \leq \epsilon$$

Siamo quindi nelle ipotesi del Teorema di Vitali, e quindi $\|f_n - f\|_p \to_n 0$.

AM5 2008: Tracce delle lezioni- 4

L^2 e gli spazi di HILBERT

$$\|f\|_2^2 := \int |f|^2 = < f, f > \quad \text{ove} \qquad < f, g > := \int fg\, d\mu, \quad \forall\, f, g \in L^2$$

é un **prodotto scalare** (ovvero una **forma bilineare simmetrica positiva**) in L^2 . Notiamo che la diseguaglianza di Holder, con $p = q = 2$ dá la ben nota

$$|\int fg| \leq \|f\|_2 \; \|g\|_2 \qquad \textbf{diseguaglianza di Cauchy-Schwartz}$$

Lo spazio L^2 **é uno spazio di Hilbert**:

SPAZI DI HILBERT .

Sia $(H, \|.\|)$ spazio di Banach. Se esiste in H un **prodotto scalare** $< x, y >:= b(x, y), \quad x, y \in H$ ovvero b é **bilineare** e

$$< x, y > = < y, x > \qquad \forall x, y \in H, \qquad < x, x > \; > \; 0 \quad \forall x \in H, \quad x \neq 0$$

tale che $\|x\| = \sqrt{< x, x >} \quad \forall x \in H$, H si dice spazio di Hilbert.

Le seguenti (ben note) proprietá si verificano facilmente:

Cauchy-Schwartz : $\quad | < x, y > | \leq \|x\| \, \|y\| \quad \forall x, y \in H$

Pitagora : $\quad < x, y >= 0 \;\Rightarrow\; \|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 \quad \forall x, y \in H$

Regola del Parallelogramma : $\quad \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$

La proprietá fondamentale degli spazi di Hilbert é l'esistenza della

PROIEZIONE ORTOGONALE :

Sia V sottospazio lineare chiuso di H. Allora

$$\forall h \in H \quad \exists! \;\; h_V \in V : \quad < h - h_V, v >= 0 \quad \forall v \in V$$

Tale vettore si chiama proiezione ortogonale di h su V e si indica $P_V h$.

L'operatore P_V é una **proiezione lineare** :

$$P_V^2 = P_V, \qquad P_V(rh + sk) = rP_V(h) + sP_V(k) \quad \forall r, s \in \mathbf{R}, h, k \in H$$

Inoltre P_V é operatore lineare continuo:

$$\|P_V(h)\| \leq \|h\| \quad \forall h \in H$$

Infine, indicato $V^\perp := \{h \in H : < h, v >= 0 \quad \forall v \in V\}$, risulta $KerP_V = V^\perp$.

Prova. Il vettore $v(h)$ é quello che realizza la minima distanza di h da V:

$$\text{se} \qquad d := \inf_{v \in V} \|h - v\|, \qquad \text{allora} \qquad \|h - v(h)\| = d$$

Esistenza: Mostriamo innanzi tutto che tale inf é realizzato: se $v_n \in V$ é minimizzante, cioé $\|h - v_n\| \to_n d$, allora, dalla regola del parallelogramma

$$\|v_n - v_m\|^2 = \|(v_n - h) + (h - v_m)\|^2 = 2(\|v_n - h\|^2 + \|h - v_m\|^2) - \|2[\frac{v_n + v_m}{2} - h]\|^2$$

$$\leq 2(\|v_n - h\|^2 + \|h - v_m\|^2) - 4d^2 \to_n 0$$

perché $\|\frac{v_n+v_m}{2} - h\| \geq d$ in quanto $\frac{v_n+v_m}{2} \in V$; dunque v_n é di Cauchy e quindi converge, necessariamente ad un elemento di V perché V é chiuso.

Poi, se $\overline{v}$ realizza il minimo, cioé $\|h - \overline{v}\| = d$, allora, fissato $v \in V$ e posto

$$\varphi_v(t) := \|h - \overline{v} + tv\|^2 = \|h - \overline{v}\|^2 + t^2\|v\|^2 + 2t < h - \overline{v}, v >$$

risulta

$$\varphi_v(t) \geq \varphi_v(0) \quad \forall t \in \mathbf{R}$$

cioé $t = 0$ é di minimo per $\varphi_v(t)$ e quindi

$$0 = \varphi_v'(0) = 2 < h - \overline{v}, v > \quad \forall v \in V$$

Unicitá: se $v_1, v_2 \in V$ sono tali che $< h - v_1, v >=< h - v_2, v > \quad \forall v \in V$ allora

$$< v_2 - v_1, v >=< h - v_1, v > - < h - v_2, v >= 0 \quad \forall v \in V$$

e quindi, prendendo $v = v_2 - v_1$, troviamo che $v_1 = v_2$.

Linearitá: Da $< h - P_V h, v > = < k - P_V k, v > = 0 \ \forall v \in V$ segue

$$< rh + sk - (rP_V h + sP_V k), v >= 0 \quad \forall v \in V \quad \Rightarrow \quad P_V(rh + sk) = rP_V h + sP_V k$$

per l'unicitá.
Poi, siccome $P_V v = v \quad \forall v \in V$ e $P_V h \in V \quad \forall h \in H$, P_V é idempotente.
Inoltre, $P_V h = 0 \Leftrightarrow < h, v >= 0 \quad \forall v \in V$.

Continuitá: Per Pitagora:

$$\|h\|^2 = \|(h - P_V h) + P_V h\|^2 = \|h - P_V h\|^2 + \|P_V h\|^2 \geq \|P_V h\|^2 \quad \forall h \in H$$

Corollario : $V = \overline{V} \quad \Rightarrow \quad H = V \oplus V^\perp$.

Infatti $V \cap V^\perp = \{0\}$ ed ogni $h \in H$ si scrive come $h = P_V h + (h - P_V h) \in V + V^\perp$.

ESEMPIO. Sia $V =< e_1, \ldots, e_n >$, $e_j \in H$, $< e_i, e_j >= \delta_{ij}$. Allora

$$P_V h = \sum_{j=1}^{n} < h, e_j > e_j$$

Essendo tutte le norme su $\mathbf{R}^n$ tra loro equivalenti, V é completo e quindi é chiuso in H. Poi,

$$< h - \sum_i < h, e_i > e_i \, , \, e_j > =< h, e_j > - < h, e_j >= 0$$

Proiezione su un insieme convesso e chiuso.

Sia C sottoinsieme chiuso in H Hilbert.
Se C é anche convesso (cioé $x, y \in C \Rightarrow tx + (1-t)y \in C \quad \forall t \in [0,1]$), allora, esattamente come nel caso in cui C é sottospazio lineare, si vede che

$$\forall h \in H \quad \exists h_C \in C : \quad \inf_C \|h - v\| = \|h - h_C$$

Fissato $v \in C$, la funzione

$$\varphi_v(t) := \|h - [tv + (1-t)h_C]\|^2 = \|h - h_C\|^2 + t^2\|h_C - v\|^2 + 2t < h - h_C, h_C - v >, \quad t \in [0,1]$$

ha, in $t = 0$, un punto di minimo, e quindi

$$0 \leq \varphi_v'(0) = 2 < h - h_C, h_C - v > \qquad \forall v \in V$$

ovvero

$$< h - h_C, v - h_C > \leq 0 \quad \forall v \in C$$

TEOREMA DI RAPPRESENTAZIONE DI RIESZ .

Sia $l : H \to \mathbf{R}$ *lineare e continuo. Allora*

$$\exists \quad h \in H : \quad l(x) \ = < x, h > \qquad \forall x \in H$$

Prova. Se $l(x) = 0 \quad \forall x \in H$, basta prendere $h = 0$. Altrimenti, l continuo $\Rightarrow \ V := l^{-1}(0)$ é sottospazio lineare chiuso proprio di H, e quindi esiste $h \neq 0$ tale che $< h, v >= 0 \quad \forall v \in V$. Posiamo supporre $\|h\| = 1$. Siccome $l(x - \frac{l(x)}{l(h)}h) = 0 \quad \forall x \in H$, abbiamo che $< h, x - \frac{l(x)}{l(h)}h >= 0 \quad \forall x \in H$ ovvero $l(x) =< x, l(h)h >$.

NOTA. Lo spazio lineare $H' := \{l : H \to \mathbf{R} : \quad l$ é lineare e continuo$\}$ dotato della norma degli operatori

$$\|l\| := \sup_{x \neq 0} \frac{|l(x)|}{\|x\|}$$

é uno spazio di Banach. Tale spazio é detto **duale algebrico topologico** di H.

Dato $h \in H$, il funzionale $l_h : H \to \mathbf{R}$ definito come $l_h(x) :=< x, h >$, é chiaramente lineare e, per Cauchy-Schwartz, continuo e quindi é un elemento di H'. Inoltre, l'applicazione

$$T : h \to l_h$$

di H in H' é chiaramente lineare e, di piú, $\|T(h)\| = \|l_h\| = \|h\|$. Il Teorema di Riesz dice che T é suriettiva. In altre parole

Corollario (RIESZ) .

Ogni spazio di Hilbert é isometricamente isomorfo al suo duale.

Diseguaglianza di BESSEL .

$$e_j \in H, \ < e_i, e_j >= \delta_{ij} \quad \Rightarrow \quad \sum_j | < h, e_j > |^2 \ \leq \|h\|^2 \quad \forall h \in H$$

Prova. Posto $V_n =< e_1, \ldots, e_n >$, $P_n := P_{V_n}$, é

$$\sum_{j=1}^{n} | < h, e_j > |^2 \ = \ \|P_n h\|^2 \ \leq \ \|h\|^2 \quad \forall h \in H, \quad \forall n \in \mathbf{N}$$

BASE HILBERTIANA (o base ortonormale) .

• Un sistema di vettori e_j é **sistema ortonormale** se $< e_i, e_j >= \delta_{ij}$

•• Un sistema di vettori e_j é **completo** se $< x, e_j >= 0 \quad \forall j \quad \Rightarrow \quad x = 0$

NOTA.

(i) Un sistema ortonormale e_j é completo se e solo se $< e_j >$, varietá lineare generata dagli e_j, é densa in H.
Ad esempio, $e_j := \frac{e^{ijt}}{\sqrt{2\pi}}, \quad t \in [0, 2\pi], \quad j \in \mathbf{Z}$ formano un sistema ortonormale completo in $L^2([0, 2\pi])$.
Ció segue dal teorema di Weierstrass (ogni funzione continua in $[0, 2\pi]$ é limite uniforme di polinomi trigonometrici) e del fatto che, come vedremo, se Ω é aperto in $\mathbf{R}^N$, $C_0^\infty(\Omega)$ (spazio delle funzioni $C^\infty(\Omega)$ a supporto compatto contenuto in Ω), é denso in ogni L^p.

(ii) **Ogni Hilbert separabile H ha un sistema ortonormale (numerabile) completo**.
Infatti, se D é numerabile e denso in H, da D si puó costruire un insieme numerabile di vettori linearmente indipendenti f_j tali che la varietá lineare $< f_j >$ coincide con $< D >$ e quindi $< f_j >$ é densa in H. Posto $e_1 = \frac{f_1}{\|f_1\|}$ e quindi, induttivamente, $e_{k+1} = \frac{v_{k+1}}{\|v_{k+1}\|}$, ove

$$v_{k+1} := f_{k+1} - \sum_{j=1}^{k} < f_{k+1}, e_j > e_j$$

(proiezione ortogonale di f_{k+1} sulla varietá generata dagli $e_j : j = 1, \dots, k$: procedimento di ortonormalizzazione di Gram-Schmidt) si ottiene un sistema (numerabile) ortonormale che genera una varietá lineare densa (e quindi é completo).

• • • Un sistema ortonormale di vettori e_j é **base hilbertiana** se

$$x = \sum_j < x, e_j > e_j := \lim_n \sum_{j=1}^{n} < x, e_j > e_j \quad \forall x \in H$$

I numeri $< x, e_j >$ si chiamano **coefficenti di Fourier** di x nella base e_j.

Proposizione 1. Un sistema ortonormale completo e_j é base hilbertiana e
(**IDENTITÁ DI PARSEVAL**) $\|x\|^2 = \sum_j | < x, e_j > |^2 \quad \forall x \in H$

Sia $x_n := \sum_{j=1}^{n} < x, e_j > e_j$. Dalla diseguaglianza di Bessel segue che $\|x_{n+p} - x_n\|^2 = \sum_{n+1}^{n+p} | < x, e_j > |^2 \to_n 0$ per ogni p, ovvero x_n é di Cauchy e quindi converge, diciamo a $\overline{x}$. Proviamo che $\overline{x} = x$. Infatti, $< \overline{x}, e_k >= \lim_n < x_n, e_k >=< x, e_k >$. Dunque $< x - \overline{x}, e_k >= 0 \quad \forall k$ e quindi $x = \overline{x}$. Infine, $x_n \to x \Rightarrow \|x_n\| \to_n \|x\|$ e quindi $\sum_{j=1}^{n} | < x, e_j > |^2 = \|x_n\|^2 \to \|x\|^2$.

Proposizione 2. Ogni Hilbert separabile ha una base hilbertiana.

NOTA. Sia e_j base ortonormale. Da Parseval: $\quad x \to (Fx)_j :=< x, e_j >, \ \ x \in H$ é una isometria (lineare) di H su l^2. (Suriettivitá: $(a_j)_{j \in \mathbf{N}}, \ \sum_j |a_j|^2 < +\infty \quad \Rightarrow \quad x := \sum_j a_j e_j \in H$ é tale che $(Fx)_j = a_j$.)

Teorema di isomorfismo. Ogni Hilbert separabile, é isometricamente isomorfo a l^2.

NOTA. Piú in generale, ogni Hilbert é isometricamente isomorfo a un $L^2(X, \mu)$, ove X é l'insieme degli indici di una base hilbertiana per H (eventualmente non numerabile) e μ é la misura che conta.

CONVERGENZA DEBOLE

Ricordiamo che $x_n \to_n x$ (x_n **converge in norma (o fortemente** ad x) se $\|x_n - x\| \to_n 0$ e $x_n \in H$ si dice **limitata** se $\sup_n \|x_n\| < +\infty$.

NOTA: **successioni limitate** in spazi di Hilbert di dimensione infinita **non hanno in generale sottosuccessioni convergenti**. Ad esempio, se $e_j, j \in \mathbf{N}$ é sistema ortonormale, allora $\|e_i - e_j\|^2 = 2$ se $i \neq j$ e quindi e_j non ha estratte convergenti.

Definizione $('\rightharpoonup' \quad = \quad$ ' converge debolmente').

$$x_n \rightharpoonup_n 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad < x_n, h > \to_n 0 \quad \forall h \in H$$

Si dice che $x_n \rightharpoonup_n x$ se $(x_n - x) \rightharpoonup_n 0$. Dalla diseguaglianza di Bessel segue ad esempio che, se $e_j, j \in \mathbf{N}$ é sistema ortonormale, $e_j \rightharpoonup_j 0$.

Proposizione 1

(i) $x_n \to x \quad \Rightarrow \quad x_n \rightharpoonup_n x$ (ma non viceversa !)

(ii) $x_n \rightharpoonup_n x,\ \ y_n \rightharpoonup_n y, \quad \alpha, \beta \in \mathbf{R} \quad \Rightarrow \quad \alpha x_n + \beta y_n \rightharpoonup_n \alpha x + \beta y$

(iii) $x_n \rightharpoonup_n x \quad \Rightarrow \quad \liminf \|x_n\| \geq \|x\|$

Prova. (i) $| < x_n - x, h > | \ \leq \ \|h\| \ \|x_n - x\| \ \rightarrow_n 0.$ (ii) ovvia (iii) Possiamo supporre $x \neq 0$. Allora

$$| < x_n, \frac{x}{\|x\|} > | \leq \|x_n\| \quad \Rightarrow \quad \|x\| \ = \ \lim_n | < x_n, \frac{x}{\|x\|} > | \ \leq \ \liminf \|x_n\|$$

NOTA. (iii) dice: la norma é 'inferiormente semicontinua rispetto alla convergenza debole'.

Teorema (uniforme limitatezza). $\quad x_n \rightharpoonup_n x \quad \Rightarrow \quad \sup_n \|x_n\| < +\infty$

Prova. Posto $y_n := x_n - x$ é $y_n \rightharpoonup 0$. Se y_n é non limitata, allora, per una sottosuccessione (ancora indicata y_n), si avrá $\|y_n\| \geq 4^n$ e quindi

$$h_n := 4^n \frac{y_n}{\|y_n\|}, \qquad \|h_n\| = 4^n, \qquad < y_n,\ h > \rightarrow_n 0 \quad \forall h \in H$$

Basta quindi provare che se $\|h_n\| = 4^n$ allora non puó accadere che $h_n \rightharpoonup 0$. Per provare tale affermazione, poniamo

$$h := \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\sigma_j}{3^j} \frac{h_j}{\|h_j\|}, \qquad |\sigma_j| = 1 \quad \forall j$$

e proviamo che, per una scelta opportuna dei σ_j risulta $| < h_j, h > | \rightarrow_n +\infty$. É

$$| < h_n, h > | = | \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\sigma_j}{3^j} < h_n, \frac{h_j}{\|h_j\|} > | \geq$$

$$\left| \, | \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\sigma_j}{3^j} < h_n, \frac{h_j}{\|h_j\|} > + \frac{\sigma_n}{3^n} \|h_n\| \, | \ - | \sum_{j>n} \frac{\sigma_j}{3^j} < h_n, \frac{h_j}{\|h_j\|} > | \right|$$

Se scegliamo $\sigma_1 := 1$ e, induttivamente,

$$\sigma_n := 1 \ \text{ se } \ \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\sigma_j}{3^j} \ < h_n, \frac{h_j}{\|h_j\|} \geq 0 \ \text{ e } \ \sigma_n := -1 \ \text{ se } \ \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\sigma_j}{3^j} \ < h_n, \frac{h_j}{\|h_j\|} < 0$$

vediamo che $| < h_n, h > | \geq \frac{4^n}{3^n} - \sum_{j>n} \frac{1}{3^j} \|h_n\| = \frac{1}{2} \frac{4^n}{3^n}$.

Lemma di Mazur. $h_n \in C$ *chiuso e convesso*, $h_n \rightharpoonup_n h \Rightarrow h \in C$.

Prova. Siccome $h_n \in C$, indicata con h_C la proiezione di h su C, si ha $< h - h_C, h_n - h_C > \leq 0 \quad \forall n$. Passando al limite otteniamo $\|h - h_C\|^2 \leq 0$ e quindi $h = h_C \in C$.

Proposizione 2

(i) $x_n \rightharpoonup_n x, \; y_n \to y \quad \Rightarrow \quad < x_n, y_n > \to_n < x, y >$

(ii) $\overline{< e_i >} = H, \; < x_n, e_j > \to_n 0 \quad \forall j, \quad \sup_n \|x_n\| < +\infty \quad \Rightarrow \quad x_n \rightharpoonup_n 0$

Prova. (i) $| < x_n, y_n > - < x\,, y > | \; = \; | < x_n - x, y > \; + \; < x_n\,, y_n - y > | \; \leq$

$\leq \; | < x_n - x, y > | \; + \; \|y_n - y\| \, \|x_n\| \; \to_n 0$ perché x_n é limitata

(ii) $< x_n, h > \to_n 0 \quad \forall h \in < e_j >$. Se $h_k \in < e_j >, \quad h_k \to_k h$, allora $| < x_n, h > | \leq | < x_n, h_k > | + | < x_n, h - h_k > | \quad \Rightarrow \quad \limsup_n | < x_n, h > | \leq \|h_k - h\| \quad \sup_n \|x_n\| \quad \forall k \in \mathbf{N}$ e quindi $\limsup_n | < x_n, h > | = 0$.

Compattezza debole. *Sia H Hilbert separabile. Allora* x_n **limitata** $\Rightarrow$ x_n **ha una estratta debolmente convergente**.

Prova. Sia e_j base ortonormale. Siccome x_n é limitata, basta (vedi Proposizione 2-(ii)) provare che $\exists \; x_{n_k}, \; x : \; < x_{n_k}, e_j > \to_k < x, e_j > \quad \forall j \in \mathbf{N}$

Siccome $| < x_n, e_1 > | \leq \sup_n \|x_n\| < +\infty$, esiste una (prima) selezione di indici $n_j = n_j^1$ e un numero c_1 tale che $c_1 = \lim_j < x_j^1, e_1 >$. Effettuando una (ulteriore) selezione di indici n_j^2, troviamo che $\exists c_i := \lim_j < x_{n_j^2}, e_i >$ $i = 1, 2$. Effettuando k successive selezioni di indici $(n_j^{k-1})_{j \in \mathbf{N}} \subset (n_j^k)_{j \in \mathbf{N}}$ ed applicando il **principio diagonale di Cantor** troviamo che lungo la sottosuccessione (diagonale) $n_k := n_k^k$ si ha $\exists c_i := \lim_k < x_{n_k}, e_i > \quad \forall i \in \mathbf{N}$

Da $\sum_{i=1}^N c_i^2 = \lim_k \sum_{i=1}^N | < x_{n_k}, e_i > |^2 \leq \sup_n \|x_n\|^2 \quad \forall N$ segue che $\sum_{i=1}^\infty c_i^2 < +\infty$. Resta quindi definito il vettore in H dato da $x := \sum_{i=1}^\infty c_i e_i$ avente appunto la proprietá $< x, e_j >= c_j = \lim_k < x_{n_k}, e_j >$.

NOTA. L'ipotesi di separabilitá si puó facilmente eliminare, argomentando nella chiusura della varitá lineare generata dagli x_n (che é appunto separabile).

Esercizi e complementi 4

SERIE DI FOURIER DI FUNZIONI $L^2([-\pi,\pi])$

Indichiamo con $C_{2\pi}$ lo spazio delle funzioni continue in $\mathbf{R}$ a valori complessi che sono 2π periodiche, dotato della norma della convergenza uniforme in $[-\pi,\pi]$:

$$C_{2\pi} \quad := \quad \{f \in C(\mathbf{R},\mathbf{C}) : \quad f(t+2\pi) = f(t) \quad \forall t \in \mathbf{R}\}, \qquad \|f\|_\infty := \sup_{t\in[-\pi,\pi]} |f(t)|$$

Tra tali funzioni é definito il prodotto di convoluzione

$$f \star g \ (t) := \int_{-\pi}^{\pi} f(t-s)\, g(s) ds$$

Indicheremo con $\mathcal{PT}$ il sottospazio dei polinomi trigonometrici, ovvero il sottospazio lineare generato da $e^{ijt} : j \in \mathbf{N}$.

Esercizio 1 . Provare che

(i) $f \star g \quad = \quad g \star f$ (ii) $f \in C_{2\pi}, \quad g \in \mathcal{PT} \quad \Rightarrow \quad f \star g \in \mathcal{PT}$

Esercizio 2. Siano $g_n \in C_{2\pi}$ tali che

$$g_n(t) \geq 0 \quad \forall t, \qquad \int_{-\pi}^{\pi} g_n = 1 \quad \forall n \in \mathbf{N}, \qquad \int_{|t|\geq\delta} g_n \to_n 0 \quad \forall \delta > 0$$

Provare che $f \star g_n \to_n f$ uniformemente in $[-\pi,\pi]$.

Esercizio 3 . Siano

$$\tilde{g}(t) := \frac{1+\cos t}{2} = \frac{1}{2}[1 + \frac{e^{it}+e^{-it}}{2}], \qquad g_n := \frac{\tilde{g}^n}{\int_{-\pi}^{\pi} \tilde{g}^n}$$

Provare che le g_n soddisfano le condizioni dell'Esercizio 2 e concludere che $\mathcal{PT}$ é denso in $C_{2\pi}$.

Esercizio 4. Sia $f \in L^2([-\pi,\pi])$. Provare che

$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists \phi_\epsilon \in C_0([-\pi,\pi]) : \qquad \int_{-\pi}^{\pi} |f - \phi_\epsilon|^2 \leq \epsilon$$

e concludere che $\frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin kt, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos kt, \quad k \in \mathbf{N}$ é base hilbertiana in $L^2([-\pi,\pi])$.

SPAZI DI HILBERT, CONVERGENZA DEBOLE

Sia H Hilbert. $C \subset H$, $\Gamma : C \to \mathbf{R}$ sono **convessi** se

$$tx + (1-t)y \in C, \qquad \forall x, y \in C, \quad \forall t \in [0,1]$$

$$\Gamma(tx + (1-t)y) \quad \leq \quad t\Gamma(x) + (1-t)\Gamma(y) \qquad \forall x, y \in C, \quad \forall t \in [0,1]$$

Esercizio 1. Sia $C \subset H$ chiuso e convesso. Provare che

$$\forall h \in H, \quad \exists \ ! \ h_C \in C : \quad \|h - h_C\| \leq \|h - v\|, \quad \forall v \in C$$

e che $$< h - h_C, \ v - h_C > \leq 0, \qquad \forall v \in C.$$

Esercizio 2. Sia C chiuso e convesso in H. Provare che

$$x_n \in C, \quad x_n \rightharpoonup x \quad \Rightarrow \quad x \in C$$

Dedurre che, se $x_n \rightharpoonup x$ allora esistono $\tilde{x}_n$, combinazioni lineari convesse degli x_n, tali che $\|\tilde{x}_n - x\| \to_n 0$.

Esercizio 3. Sia C convesso e $\Gamma : C \to \mathbf{R}$ funzionale convesso e continuo.

Provare che $\quad x_n \in C, \quad x_n \rightharpoonup x \quad \Rightarrow \quad \liminf \Gamma(x_n) \geq \Gamma(x)$

Esercizio 4. Sia C chiuso e convesso in H, $\Gamma : C \to \mathbf{R}$ continuo e **coercivo:** $\quad x_n \in C, \quad \|x_n\| \to +\infty \quad \Rightarrow \quad \Gamma(x_n) \to +\infty$

Provare che $\quad \exists \underline{x} \in C : \quad \inf_C \Gamma = \Gamma(\underline{x})$.

Esercizio 5. Provare che

$$x_n \rightharpoonup x, \ \|x_n\| \to \|x\| \ \Rightarrow \ \|x_n - x\| \to 0$$

Esercizio 6. Sia $L \in \mathcal{L}\,(H)$ (operatore lineare e continuo in H).

Provare che esiste un (unico) $L^\star \in \mathcal{L}\,(H)$ tale che $< L^\star x, y > = < x, Ly >$ $\forall x, y \in H$ (**operatore aggiunto** di L) e dedurre che $x_n \rightharpoonup x \ \Rightarrow \ Lx_n \rightharpoonup Lx$

Esercizio 7. Provare che $\int_A e^{inx}dx \to 0 \forall A \subset [0,\pi]$ misurabile e dedurre che , se $n_k < n_{k+1}$, l'insieme $\{x \in [0,\pi] : \ \sin(n_k x) \ \text{ converge } \}$ è di misura nulla.

CENNI DI SOLUZIONE

Serie di Fourier in $L^2([-\pi,\pi])$

Esercizio 1 - (ii). Sia $g(t)=\sum_{j=1}^n c_j\, e^{ijt}$. Si ha

$$(f\star g)(t) \;=\; \int_{-\pi}^{\pi} f(s)\left[\sum_{j=1}^n c_j\, e^{ij(t-s)}\right] ds = \sum_{j=1}^n\; [c_j \int_{-\pi}^{\pi} f(s)e^{-ijs}\; ds]\; e^{ijt}$$

Esercizio 2.

$$|(f\star g_k)(t)\;-\;f(t)| \;=\; \left|\int_{-\pi}^{\pi} f(t-s)\, g_k(s)\, ds \;-\; \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, g_k(s)\, ds\right| \;\le$$

$$\le \int_{|s|\le\delta} |f(t-s)-f(t)|\;\; g_k(s)\, ds \;+\; 2\,\|f\|_\infty \int_{|s|\ge\delta} g_k(s)\, ds \;\le\; \epsilon \;+\; 2\|f\|_\infty\epsilon$$

se $\delta\le\delta_\epsilon,\quad |s|\le\delta \quad\Rightarrow\quad |f(t-s)-f(s)|\le\epsilon$ e $k\ge k_\epsilon \quad\Rightarrow\quad \int_{|t|\ge\delta} g_k\le\epsilon.$

Esercizio 3. Si tratta di provare che $\int_{|s|\ge\delta} g_k(s)\, ds \;\to_k 0 \quad \forall\delta>0.$

É $$c_k := \int_{-\pi}^{\pi} \left[\frac{1+\cos t}{2}\right]^k dt \;\ge\; 2\int_0^{\pi}\left[\frac{1+\cos t}{2}\right]^k \sin t\; dt =$$

$$= \; -\frac{4}{k+1}\int_0^{\pi}\frac{d}{dt}\left[\frac{1+\cos t}{2}\right]^{k+1} = \frac{4}{k+1}.$$ Quindi

$$\frac{1}{c_k}\int_{|s|\ge\delta} g_k(s)\, ds \;\le\; \frac{(k+1)\pi}{2}\left[\frac{1+\cos\delta}{2}\right]^k \quad \to_k 0 \quad \forall\delta>0$$

Esercizio 4. Possiamo supporre $f\equiv 0$ fuori di $[-\pi,\pi]$ e infatti

$$f\equiv 0 \qquad \forall\; t\notin[-\pi+\frac{1}{n},\pi-\frac{1}{n}]$$ perché

$\int|f-f\chi_{[-\pi+\frac{1}{n},\pi-\frac{1}{n}]}|^2\le\epsilon$ se n é grande (assoluta continuitá dell'integrale). Siccome $f=f^+-f^-$, basta provare che

se $g\ge 0$, $g\in L^2(\mathbf{R})$, $g(t)\;=\;0$ $\forall\, t\notin[-\pi+\frac{1}{n},\pi-\frac{1}{n}]$, allora

$$\forall\epsilon>0,\quad \exists\tilde g\in C_0((-\pi,\pi)) : \qquad \int_{-\pi}^{\pi} |g-\tilde g|^2 \;\le\; \epsilon$$

Siccome poi esistono funzioni semplici $\quad 0 \leq \phi_n \leq g \quad$ con $\quad \phi_n \leq \phi_{n+1} \quad$ puntualmente convergenti a f, e quindi (convergenza monotona!) convergenti a g anche in L^2, basta provare che,

se $\qquad E \subset [-\pi + \frac{1}{n}, \pi - \frac{1}{n}]$ é Lebesgue misurabile $\qquad$, allora

$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists \quad h \in C_0(-\pi, \pi) : \qquad \int |\chi_E - h|^2 \leq \epsilon$$

Ma ció segue subito dal fatto che

$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists \quad K_\epsilon \ \subset \ E \ \subset \ O_\epsilon \ \subset \ (-\pi, \pi) : \qquad L^1(O_\epsilon \setminus K_\epsilon) \leq \epsilon$$

con $\ K_\epsilon\ $ compatto, $\ O_\epsilon\ $ aperto.

Infatti, dato $\ \delta > 0\ $ tale che $\quad d(x, K_\epsilon) \leq \delta \quad \Rightarrow \quad x \in O_\epsilon, \quad$ basta prendere $\varphi_\epsilon(x) := \ \gamma(d(x, K_\epsilon)) \quad$ ove $\quad \gamma \in C(\mathbf{R}) \quad$ con $\ \gamma(0) = 1\ $ e $\ \gamma(t) = 0$ se $t \geq \delta$:

$$\int |\varphi_\epsilon - \chi_E|^2 \leq 4 \int \chi_{O_\epsilon \setminus K_\epsilon} = 4L^1(O_\epsilon \setminus K_\epsilon) \leq 4\epsilon$$

Spazi di Hilbert, convergenza debole

Esercizio 1. $\quad$ L'esistenza di $\ h_C\ $ segue come nel caso in cui C é sottospazio lineare. Poi,

$$v \in C \ \Rightarrow \ \|h - [tv + (1-t)h_C\|^2 \geq \|h - h_C\|^2 \quad \forall t \in [0,1] \ \Rightarrow$$

$$0 \ \leq \ \frac{d}{dt} \ \left[\|h - [tv + (1-t)h_C\|^2\right]_{|t=0} \ =$$

$$\frac{d}{dt} \ \left[\|h\|^2 + t^2\|v\|^2 + (1-t)^2\|h_C\|^2 - 2 < h, tv + (1-t)h_C > +2t(1-t) < v, h_C >\right]_{|t=0}$$

$$= \ -2\|h_C\|^2 - 2 < h, v > +2 < h, h_C > +2 < v, h_C > \ = \ -2 \ < h - h_C, v - h_C >$$

Esercizio 2. $\quad x_n \in C, \ x_n \rightharpoonup x, \ \ x_C$ proiezione di x sul convesso chiuso $C \ \Rightarrow$

$$< x - x_C, x_n - x_C > \leq \ 0 \quad \Rightarrow \quad < x - x_C, x - x_C > \leq \ 0 \quad \Rightarrow \quad x = x_C \in C$$

Esercizio 3. $\quad$ Sia $\quad c := \quad \liminf_n \Gamma(x_n) = \lim_j \Gamma(x_{n_j})$. $\qquad$ Allora

$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists j_\epsilon : \qquad j \geq j_\epsilon \quad \Rightarrow \quad x_{n_j} \in \Gamma^{c+\epsilon} := \ \{x \in C : \Gamma(x) \leq c + \epsilon\}$$

Ora, $\quad \Gamma^{c+\epsilon}\quad$ é chiuso (perché Γ é continuo) e convesso (perché Γ é convesso), e quindi (Esercizio 2)

$$x_n \rightharpoonup x \ , x_n \in \Gamma^{c+\epsilon} \quad \Rightarrow \quad x \in \Gamma^{c+\epsilon} \quad \forall \epsilon > 0$$

ovvero $\quad \Gamma(x) \le c + \epsilon, \quad \forall \epsilon > 0.$

Esercizio 4. Sia $x_n \in C$ minimizzante: $\qquad \Gamma(x_n) \to \inf_C \Gamma.$

Dalla coercivitá segue $\quad \sup_n \|x_n\| < +\infty \quad$ e quindi esiste una sottosuccessione x_{n_k} (ancora minimizzante) che converge debolmente a un x. Siccome C é chiuso e convesso, allora (Esercizio 2) $\quad x \in C \quad$ e quindi (Esercizio 3)

$$\inf_C \Gamma \quad = \quad \liminf_k \Gamma(x_{n_k}) \quad \ge \quad \Gamma(x) \quad \ge \quad \inf_C \Gamma$$

Esercizio 5. $\quad \|x_n - x\|^2 = \|x_n\|^2 + \|x\|^2 - 2 < x, x_n > \to 2\|x\|^2 - 2 < x, x >.$

Esercizio 6. Indichiamo con $\quad G : H \to H^\star \quad$ l'isomorfismo di Riesz:

$$\forall h \in H, \qquad G(h)\ (x)\ = < h, x > \qquad \forall x \in H$$

Fissato $y \in H$, $\quad x \to l^y(x) := < L(x), y > \quad$ é un funzionale lineare e continuo e quindi esiste un unico vettore, diciamo $\quad L^\star(y), \quad$ tale che

$$G(L^\star(y)) = l^y, \quad \text{ovvero} \qquad < L^\star(y), x > \ = \ l^y(x) = < L(x), y > \qquad \forall x \in H$$

Chiaramente, $\quad L^\star$ é lineare e $\qquad | < L^\star(y), x > | \ = \ | < L(x), y > |$

$$\le \ \|Lx\|\ \|y\| \ \le \ \|L\|\ \|x\|\ \|y\| \quad \Rightarrow \quad \|L^\star(y)\ \| \ \le \ \|L\|\ \|y\|$$

e quindi $\quad L^\star$ é continuo e

$$\|L^\star\| := \ \sup\{\|L^\star(y) : \quad \|y\| \le 1\} \ \le \ \|L\|$$

In effetti, siccome chiaramente $\quad (L^\star)^\star = L, \;$ si ha $\; \|L^\star\| = \|L\|. \qquad$ Infine,

$$x_n \rightharpoonup x \quad \Rightarrow \quad < L(x_n), y > = < L^\star(y), x_n > \to < L^\star(y), x > = < L(x), y > \qquad \forall y \in H$$

Esercizio 7. Da Bessel:

$$\sum_n |\int_0^{2\pi} e^{int}\chi_A dt|^2 \le \|\chi_A\|_2^2 \quad \Rightarrow \quad \int_0^{2\pi} e^{int}\chi_A dt \to_n 0$$

Poi, se $f(x) := \lim \sin(n_k x)$ in $A := \{x : \exists \lim_k \sin(n_k x)\}$, per quanto sopra si ha

$$0 = \lim_k \int_0^\pi \sin(n_k x)\chi_{\{f\ge 0\}} = \int_0^\pi f\chi_{\{f \ge 0\}}$$

e quindi $f^+ = 0$ q.o. ed, analogamente per f^- e quindi esiste N_s con $\mu(N_s) = 0$ tale che $\sin n_k x \to 0$ in $A \setminus N_s$.
Analogamente, $\cos n_k x \to 0$ in $A \setminus N_c$. Ma $1 = \sin^2 n_k x + \cos^2 n_k x \to 1$ in A e quindi $A \subset N_s \cup N_c$.

AM5 2008: Tracce delle lezioni- 5

SPAZI L^p: COMPATTEZZA DEBOLE E DUALITÁ

Sia μ misura su X, $p > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$; $\|.\|_p$ indicherá la norma in $L^p(X, \mu)$.

Definizione di convergenza debole in L^p. Sia $f_n \in L^p$:

$$f_n \rightharpoonup_n f \qquad \Leftrightarrow \qquad \int f_n \, g \, d\mu \to \int f \, g \, d\mu \quad \forall \ g \in L^q$$

Uniforme limitatezza. $f_n \rightharpoonup_n f$ in L^p $\Rightarrow$ $\sup_n \|f_n\|_p < +\infty$

Prova. Per assurdo. Come nel caso $p = 2$ possiamo supporre che esista $f_n \in L^p$:

$$\|f_n\|_p = 4^n, \qquad \int f_n \, g \to_n 0 \quad \forall g \in L^q$$

Posto $g_n := \dfrac{|f_n|^{p-2} f_n}{\|f_n\|_p^{p-1}}$ si ha $\displaystyle\int |g_n|^q = 1, \quad \int f_n g_n = \|f_n\|_p = 4^n$

Posto $\sigma_1 := 1$ e, induttivamente, $\sigma_n := 1$ se $\sum_{j=1}^{n-1} \frac{\sigma_j}{3^j} \int f_n \, g_j \geq 0$ e

$\sigma_n := -1$ se $\displaystyle\left(\sum_{j=1}^{n-1} \frac{\sigma_j}{3^j} \int f_n \, g_j \right) < 0$, sia $\displaystyle\hat{g} := \sum_1^\infty \frac{\sigma_j}{3^j} g_j$. Da

$\displaystyle\| \sum_n^{n+m} \frac{\sigma_j}{3^j} g_j \|_q \leq \sum_n^{n+m} \frac{1}{3^j} \to_n 0 \ \forall m$ segue $\hat{g} \in L^q$, e quindi $\displaystyle|\int f_n \, \hat{g}| =$

$$= |\sum_{j=1}^n \frac{\sigma_j}{3^j} \int f_n g_j + \sum_{j>n} \frac{\sigma_j}{3^j} \int f_n g_j| \quad \geq \quad \left| |\sum_{j=1}^n \frac{\sigma_j}{3^j} \int f_n \, g_j| - |\sum_{j>n} \frac{\sigma_j}{3^j} \int f_n \, g_j| \right|$$

Ora, $\displaystyle|\sum_{j=1}^n \frac{\sigma_j}{3^j} \int f_n \, g_j| = |\sum_{j=1}^{n-1} \frac{\sigma_j}{3^j} \int f_n \, g_j + \frac{\sigma_n}{3^n} \int f_n \, g_n| \geq (\frac{1}{3})^n \int f_n \, g_n = (\frac{4}{3})^n$,

mentre $\displaystyle|\sum_{j>n} \frac{\sigma_j}{3^j} \int f_n \, g_j| \leq \sum_{j>n} \frac{4^n}{3^j} = \frac{1}{2}(\frac{4}{3})^n$ e quindi $\displaystyle|\int f_n \hat{g}| \geq \frac{1}{2}(\frac{4}{3})^n \to +\infty$,

contraddizione.

Proposizione.

(i) $\|f_n - f\|_p \to_n 0 \quad \Rightarrow \quad f_n \rightharpoonup_n f$ in L^p (ma non viceversa)

(ii) $f_n \rightharpoonup_n f,\ g_n \rightharpoonup_n g, \quad$ in $L^p,\ \alpha, \beta \in \mathbf{R} \quad \Rightarrow \quad \alpha f_n + \beta g_n \rightharpoonup_n \alpha f + \beta g$ in L^p

(iii) $f_n \rightharpoonup_n f$ in $L^p \quad \Rightarrow \quad \liminf \|f_n\|_p \geq \|f\|_p$

(iv) $f_n \rightharpoonup_n f$ in $L^p,\ g_n \to g$ in $L^q \quad \Rightarrow \quad \int f_n\, g_n \to_n \int f\, g$

(v) $\overline{< g_i >} = L^q,\ \int f_n\, g_j \to_n 0 \quad \forall j,\ \sup_n \|f_n\|_p < +\infty \quad \Rightarrow \quad f_n \rightharpoonup_n 0$ in L^p

Prova. (i) $|\int (f_n - f)\, g| \leq \|f_n - f\|_p\, \|g\|_q \to_n 0 \quad \forall\, g \in L^q$ (ii) ovvia

(iii) $|\int f_n\, g| \leq \|f_n\|_p\, \|g\|_q \ \Rightarrow\ |\int f\, g| \leq (\liminf_n \|f_n\|_p)\, \|g\|_q \quad \forall\, g \in L^q \ \Rightarrow$

$$\int |f|^p \;=\; |\int f\, (|f|^{p-2}\, f)| \;\leq\; \liminf_n \|f_n\|_p\, \|\, |f|^{p-1}\, \|_q = \liminf_n \|f_n\|_p\, (\int |f|^p)^{\frac{1}{q}}$$

(iv) $\sup_n \|f_n|_p < +\infty \ \Rightarrow$

$$|\int (f_n g_n - f\, g)| \leq |\int (f_n - f) g| + |\int (g_n - g) f_n| \leq |\int (f_n - f) g| + \|f_n\|_p \|g_n - g\|_q \to_n 0$$

(v) É $\int f_n\, g \to_n 0 \quad \forall g \in < g_j >$. Dato $g \in L^q$, siano $h_j \in < g_j >$ tali che $\|h_j - g\|_q \to_j 0$. Allora

$$|\int f_n g| \leq |\int f_n h_j| + \int |f_n||h_j - g| \quad \Rightarrow \quad \limsup_n |\int f_n g| \leq \|h_j - g\|_q \sup_n \|f_n\|_p \quad \forall j$$

e quindi $\limsup_n |\int f_n\, g| = 0$.

DISEGUAGLIANZA DI HANNER

$$1 \leq p \leq 2 \quad \Rightarrow \quad (\|f\|_p + \|g\|_p)^p + |\, \|f\|_p - \|g\|_p\, |^p \leq \|f+g\|_p^p + \|f-g\|_p^p \quad \forall f, g \in L^p$$

$$p \geq 2 \quad \Rightarrow \quad (\|f\|_p + \|g\|_p)^p + |\, \|f\|_p - \|g\|_p\, |^p \geq \|f+g\|_p^p + \|f-g\|_p^p \quad \forall f, g \in L^p$$

NOTA. Scrivendo $\varphi := f + g,\ \psi := f - g$, e quindi $f = \frac{\varphi + \psi}{2}, \quad g = \frac{\varphi - \psi}{2}$, le diseguaglianze si riscrivono nel modo equivalente

$$1 \leq p \leq 2 \ \Rightarrow\ (\|f+g\|_p + \|f-g\|_p)^p + |\, \|f+g\|_p - \|f-g\|_p\, |^p \leq 2^p \left(\|f\|_p^p + \|g\|_p^p\right)$$

$$p \geq 2 \ \Rightarrow\ (\|f+g\|_p + \|f-g\|_p)^p + |\, \|f+g\|_p - \|f-g\|_p\, |^p \geq 2^p \left(\|f\|_p^p + \|g\|_p^p\right)$$

In particolare, se $p = 2$ ritroviamo la regola del parallelogramma, mentre se $p = 1$ si tratta di due modi di scrivere la diseguaglianza triangolare.

Prova. Siccome la diseguaglianza é simmetrica in f, g, e certamente vera se $\|f\|_p \ \|g\|_p = 0$, possiamo supporre $\|f\|_p \geq \|g\|_p > 0$. Dividendo per $\|f\|_p^p$, ed avendo posto $\hat{f} := \frac{f}{\|f\|_p}$, $\hat{g} := \frac{g}{\|f\|_p}$ la diseguaglianza si riscrive,

$$(*) \quad p \in [1,2]: \quad \|\hat{f}\|_p = 1, \|\hat{g}\|_p \leq 1 \ \Rightarrow \ (1+\|\hat{g}\|_p)^p + (1-\|\hat{g}\|_p)^p \leq \|\hat{f}+\hat{g}\|_p^p + \|\hat{f}-\hat{g}\|_p^p$$

$$(**) \quad p \geq 2: \quad \|\hat{f}\|_p = 1, \|\hat{g}\|_p \leq 1 \ \Rightarrow \ (1+\|\hat{g}\|_p)^p + (1-\|\hat{g}\|_p)^p \geq \|\hat{f}+\hat{g}\|_p^p + \|\hat{f}-\hat{g}\|_p^p$$

Ora, $(*), (**)$ si possono derivare da

Una diseguaglianza elementare.

$$(\bullet) \quad 1 < p < 2 \quad \Rightarrow \quad a(r)|t|^p + b(r)|s|^p \leq |t+s|^p + |t-s|^p \quad \forall s, t \in \mathbf{R}, r \in (0,1]$$

$$(\bullet\bullet) \quad 2 < p \quad \Rightarrow \quad a(r)|t|^p + b(r)|s|^p \geq |t+s|^p + |t-s|^p \quad \forall s, t \in \mathbf{R}, r \in (0,1]$$

ove $a(r) := (1+r)^{p-1} + (1-r)^{p-1}$, $b(r) := r^{1-p}\,[(1+r)^{p-1} - (1-r)^{p-1}]$.

Proviamo che $(\bullet) \ \Rightarrow \ (*)$ (e $(\bullet\bullet) \ \Rightarrow \ (**)$). Da

$$(1+r)^p + (1-r)^p = [(1+r)^{p-1} + (1-r)^{p-1}] + r^p\, r^{1-p}[(1+r)^{p-1} - (1-r)^{p-1}] =$$

$$= \ a(r) + b(r)r^p \qquad \text{segue, posto} \qquad r = \|\hat{g}\|_p,$$

$$(1+\|\hat{g}\|_p)^p + (1-\|\hat{g}\|_p)^p \ = \ \int a(r)|\hat{f}(x)|^p + b(r)|\hat{g}(x)|^p \qquad \text{perché} \qquad \int |\hat{f}|^p = 1.$$

Quindi, posto $t = \hat{f}(x)$, $s = \hat{g}(x)$, in $(\bullet)$, otteniamo $(*)$.

Prova di $(\bullet), (\bullet\bullet)$. Intanto, sono vere per $t = 0$: $\forall r > 0$ si ha

$$b'(r) = \frac{p-1}{r^p}\,[\,(1-r)^{p-2} - (1+r)^{p-2}\,] > 0 \quad \text{se} \quad p < 2 \quad \text{e} \quad b'(r) < 0 \quad \text{se} \quad p > 2$$

Siccome $b(1) = 2^{p-1} < 2$ se $p < 2$ e $b(1) > 2$ se $p > 2$, si ha quindi che $1 < p < 2 \ \Rightarrow \ b(r) < 2$ in $(0,1]$ mentre $p > 2 \ \Rightarrow \ b(r) > 2$ in $(0,1]$. Ovvero, $(\bullet)$ e $((\bullet\bullet))$ valgono per $t = 0$ e si possono dunque riscrivere, dividendo per $|t|^p$, nella forma equivalente

$$(\bullet) \quad 1 < p < 2 \quad \Rightarrow \quad a(r) + b(r)|\tau|^p \leq |1+\tau|^p + |1-\tau|^p \quad \forall \tau \in \mathbf{R}$$

$$(\bullet\bullet) \quad p > 2 \quad \Rightarrow \quad a(r) + b(r)|\tau|^p \geq |1+\tau|^p + |1-\tau|^p \quad \forall \tau \in \mathbf{R}$$

che infatti basta provare per ogni $\tau \geq 0$, perché la diseguaglianza é pari in τ.

Posto $\quad \gamma(r,\tau) := a(r) + b(r)\tau^p, \quad r \in (0,1], \tau \geq 0$, basta provare che

$$1 < p < 2 \quad \Rightarrow \quad \sup_{0<r\leq 1} \gamma(r,\tau) = |1+\tau|^p + |1-\tau|^p \quad \forall \tau \geq 0$$

$$p > 2 \quad \Rightarrow \quad \inf_{0<r\leq 1} \gamma(r,\tau) = |1+\tau|^p + |1-\tau|^p \quad \forall \tau \geq 0$$

É $\quad a'(r) = (p-1)[(1+r)^{p-2} - (1-r)^{p-2}], \quad b'(r) = -\dfrac{a'(r)}{r^p}, \quad \gamma'(r) = a'(r)[1-(\dfrac{\tau}{r})^p]$

$$a' < 0, \quad b' > 0 \quad \text{se} \quad p < 2 \quad \text{e} \quad a' > 0, \quad b' < 0 \quad \text{se} \quad p > 2 \quad \forall r > 0$$

In particolare, γ' si annulla esattamente in $r = \tau$, e $\gamma(\tau) = |1+\tau|^p + |1-\tau|^p$ é un massimo se $p < 2$ ed un minimo se $p > 2$. Quindi

$$\tau \leq 1 \qquad \Rightarrow \qquad (\bullet), (\bullet\bullet) \qquad \text{valgono}$$

Sia infine $\tau > 1$. Per quanto visto, se $\quad p < 2 \quad \delta := \frac{1}{\tau} < 1$ e $r \in (0,1]$ allora

$$a(r) + b(r)\delta^p \leq (1+\delta)^p + (1-\delta)^p \qquad \text{e quindi} \qquad \tau^p a(r) + b(r) \leq (1+\tau)^p + (1-\tau)^p$$

e vale la diseguaglianza opposta se $p > 2$. Basta allora provare che $\quad \forall r \in (0,1]$

$$a(r) + b(r)\tau^p \leq a(r)\tau^p + b(r) \quad \text{se} \quad p < 2$$

$$a(r) + b(r)\tau^p \geq a(r)\tau^p + b(r) \quad \text{se} \quad p > 2$$

E ció segue dal fatto che $\quad p < 2 \quad \Rightarrow \quad a' - b' = a'(1 + \frac{1}{r^p}) < 0$ in $(0,1]$ $\quad$ e quindi

$$a(1) = b(1) = 2^{p-1} \quad \Rightarrow \quad a(r) \geq b(r) \;\; \forall r \in (0,1] \quad \Rightarrow \quad [a(r) - b(r)]\,\tau^p \geq a(r) - b(r)$$

$$\Rightarrow \quad a(r) + \tau^p b(r) \leq \tau^p\, a(r) + b(r)$$

Se invece $p > 2$, é $a' - b' > 0$ in $(0,1]$, e quindi si ottiene la diseguaglianza opposta.

Proiezione su un convesso. *Sia* $1 < p$, $\quad C \subset L^p \quad$ *chiuso e convesso.*

Allora $$\forall f \in L^p, \quad \exists f_C \in C : \quad \|f - f_C\| \leq \|f - g\| \quad \forall g \in C$$

Inoltre $$0 \leq \int |f - f_C|^{p-2}(f - f_C)(f_C - v) \quad \forall v \in C$$

Prova. Sia $f_n \in C$ minimizzante: $\quad \|f_n - f\| \to_n d := \inf_{g \in C} \|f - g\|$. $\quad$ Se f_n é di Cauchy, $\quad \exists\, f_C \in C = \overline{C}$ tale che $\|f_n - f_C\| \to_n 0$ e quindi $\quad \|f - f_C\| = d$.

Hanner $\quad\Rightarrow\quad$ f_n **é di Cauchy.**

Caso $p > 2$**.** Utilizziamo la versione in Nota, con $f_n - f_m$, $f_n + f_m - 2f$ al posto di f, g: fissato $\epsilon > 0$, $\exists n_\epsilon$ tale che

$$n, m \geq n_\epsilon \quad \Rightarrow \quad 2^p \left[\ \|f_n - f_m\|_p^p \ + \ \|f_n + f_m - 2f\|_p^p \ \right] \leq$$

$(\|2(f_n - f)\|_p + \|2(f_m - f)\|_p)^p + | \ \|2(f_n - f)\|_p - \|2(f_m - f)\|_p|^p \leq (4d)^p + \epsilon$. Ma

C convesso $\Rightarrow \dfrac{f_n + f_m}{2} \in C \quad \Rightarrow \quad \|f_n + f_m - 2f\|_p = 2\|\dfrac{f_n + f_m}{2} - f\| \geq 2d \quad \Rightarrow$

$$2^p \left[\ \|f_n - f_m\|_p^p \ + \ (2d)^p \right] \ \leq \ 2^p \left[\ \|f_n - f_m\|_p^p \ + \ \|f_n + f_m - 2f\|_p^p \ \right] \leq (4d)^p + \epsilon$$

$$\Rightarrow \quad 2^p \ \|f_n - f_m\|_p^p \leq \epsilon \qquad \text{se} \quad n, m \geq n_\epsilon$$

Caso $1 < p < 2$**.** Utilizziamo la versione in Nota, con $f_n - f$, $f_m - f$ al posto di f, g: fissato $\epsilon > 0$, $\exists n_\epsilon$ tale che $n, m \geq n_\epsilon \quad \Rightarrow$

$$(\|f_n - f_m\|_p + \|f_n + f_m - 2f\|_p)^p + | \ \|f_n - f_m\|_p - \|f_n + f_m - 2f\|_p|^p \leq$$

$$\leq \|2(f_n - f)\|_p^p + \|2(f_m - f)\|_p^p \leq 2^{p+1} d^p + 2^p \ d^p \epsilon$$

Allora, dividendo per $(2d)^p$ e giacché $\|f_n + f_m - 2f\|_p \geq 2d$ otteniamo

$$1 + p\tfrac{\|f_n - f_m\|_p}{2d} \leq \left[1 + \tfrac{\|f_n - f_m\|_p}{2d} \right]^p \leq 2 + \epsilon \quad \text{e quindi} \quad \tfrac{\|f_n - f_m\|_p}{2d} \leq \tfrac{1+\epsilon}{p} < 1.$$

Quindi, $\quad (2d + \|f_n - f_m\|_p)^p + (2d - \|f_n - f_m\|_p)^p \leq 2^{p+1} d^p + 2^p \ d^p \epsilon \quad$ e quindi,

dividendo per $(2d)^p$, e posto $\quad \phi(t) := \frac{(1+t)^p + (1-t)^p}{2} \quad$ si ha $\quad \phi(\frac{\|f_n - f_m\|_p}{2d}) \leq 1 + \epsilon$.

Ma $\quad \phi'(t) \ > \ 0 \, \forall t \in (0, 1]$ e quindi $\frac{\|f_n - f_m\|_p^2}{4d^2} \ \leq \ \phi^{-1}(1 + \epsilon) \quad \forall n, m \geq n_\epsilon$.

Infine, $\quad \varphi_v(t) := \int |f - [tv + (1-t) f_C)]|^p \geq \int |f - f_C|^p = \varphi_v(0) \quad \forall v \in C, \quad \forall t \in [0, 1]$

$$\Rightarrow \qquad 0 \leq \varphi_v'(0) = \int |f - f_C|^{p-2} (f - f_C) \, (f_C - v) \quad \forall v \in C.$$

Corollario . Sia $V = \overline{V} \subset L^p$ sottospazio lineare. Allora

$$\forall f \in L^p, \ \exists f_V \in V : \qquad \int |f - f_V|^{p-2} (f - f_V) v = 0 \quad \forall v \in V \qquad \text{e} \quad \|f - f_V\| \leq \|f\|$$

Prova. C'é solo da provare la diseguaglianza:

$$\|f - f_V\|_p^p = \int \ |f - f_V|^{p-2} \ (f - f_V)^2 = \int \ |f - f_V|^{p-2} \ (f - f_V) f \leq \|f - f_V\|_p^{\frac{p}{q}} \ \|f\|_p$$

Teorema (IL DUALE DI L^p é L^q)

Sia $p > 1$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1$. *Allora* $(L^p)'$ **é isometricamente isomorfo a** L^q.

Se $g \in L^q$, allora $l_g(f) := \int f\, g$ é definito in L^p per la diseguaglianza di Holder, ed é un funzionale lineare e continuo:

$$|l_g(f)| \le \|f\|_p\, \|g\|_q$$

Dunque, l'applicazione

$$T : g \to l_g, \qquad l_g(f) := \int f\, g, \qquad g \in L^q$$

manda, in modo lineare, L^q nel duale di L^p. Inoltre T **é una isometria**:

$$\|g\|_q = \|T(g)\| \qquad \text{ove} \qquad \|T(g)\| := \sup_{\|f\|_p=1} |l_g(f)| = \sup_{\|f\|_p=1} |\int f\, g|$$

Infatti, in primo luogo, $\|T(g)\| \le \|g\|_q$. Poi,

$$\|\, |g|^{q-2}\, g\, \|_p^p = \int |\, |g|^{q-2}\, g\, |^p = \int |g|^q = \|g\|_q^q \qquad \text{e quindi}$$

$$\|T(g)\| \ \ge\ \frac{|l_g(|g|^{q-2}\ g)|}{\|g\|_q^{\frac{q}{p}}} = \frac{\int |g|^q}{\|g\|_q^{\frac{q}{p}}} = \|g\|_q^{q-\frac{q}{p}} = \|g\|_q$$

Infine, T **é suriettiva**:

$$\forall l \in (L^p)', \quad \exists!\ g = g_l \in L^q : \qquad l(f)\ =\ \int f\, g \quad \forall f \in L^p$$

Sia infatti $V := Ker\ l$. Se $l \ne 0$, V é sottospazio lineare chiuso proprio di L^p, e quindi esiste $h \in L^p :\ h \notin V$. Se $h_V \ne h$ é la sua proiezione su V, detta $g := |h - h_V|^{p-2}(h - h_V)$, si ha che $g \in L^q$ e

$$\int g\, v\ =\ \int |h - h_V|^{p-2}\, (h - h_V)\, v\ =\ 0 \quad \forall v \in V, \qquad \int g\, h > 0 \qquad \text{perché}$$

$\int g\, h = \int |h - h_V|^{p-2}(h - h_V)[(h - h_V) + h_V] = \int |h - h_V|^p$. Ora,

$$\forall f \in L^p : \quad l(f - \frac{l(f)}{l(h)}\, h) = 0 \ \text{ e quindi }\ 0 = \int g\, (f - \frac{l(f)}{l(h)}\, h) = \int g\, f - \frac{l(f)}{l(h)} \int g\, h$$

e quindi
$$l(f) = \int \left[\frac{l(h)}{\int\ g\, h}\ g\right] f$$

Teorema (compattezza debole) *Sia L^p separabile. Allora*

$$\sup_n \|f_n\|_p < +\infty \quad \Rightarrow \quad \exists f \in L^p, \;\; n_k \to_k +\infty : \quad f_{n_k} \to_k f$$

Prova. Sia u_n densa in L^p. É facile vedere (usando ad esempio il Teorema di Vitali) che $g_n := |u_n|^{p-2}u_n$ é denso in L^q.

Siccome $\sup_n |\int f_n g_j| < +\infty \quad \forall j$ e quindi, per ogni j, la successione numerica $n \to \int f_n g_j$ ha una estratta convergente, si puó estrarre da f_n (metodo diagonale di Cantor) una f_{n_k} tale che

$$l(g_j) := \lim_k \int f_{n_k} g_j \qquad \text{esiste finito} \quad \forall j$$

e quindi
$$l(g) := \lim_k \int f_{n_k} g \qquad \text{esiste finito} \quad \forall g \in < g_n >$$

Inoltre, l é chiaramente lineare su $< g_j >$, e $|l(g)| \leq (\sup_n \|f_n\|_p) \; \|g\|_q$ $\forall g \in < g_j >$. Dunque l si estende (in modo unico) a un funzionale lineare e continuo su tutto L^q, che continuiamo ad indicare l. Dal teorema di rappresentazione:

$$\exists f \in L^p : \qquad l(g) = \int f\, g \qquad \forall g \in L^q$$

Per quanto sopra,
$$\int f_{n_k} g_j \to_k l(g_j) = \int f g_j \quad \forall j$$

e ció é sufficente a garantire che $f_{n_k} \rightharpoonup_k f$.

Lemma di Mazur *Sia C chiuso e convesso. Allora*

$$f_n \in C, \quad f_n \rightharpoonup_n f \qquad \Rightarrow \qquad f \in C$$

Prova. Per assurdo: $f \notin C$, e quindi, indicata con f_C la sua proiezione su C, risulta

$$f \neq f_C \qquad \text{e} \qquad 0 \leq \int |f - f_C|^{p-2}(f - f_C)\,(f_C - v) \quad \forall v \in C$$

Quindi, preso $v = f_n$, si ha

$$0 < \int |f - f_C|^p = \int |f - f_C|^{p-2}(f - f_C)f - \int |f - f_C|^{p-2}(f - f_C)f_C \leq$$

$$\leq \int |f - f_C|^{p-2}(f - f_C)f - \int |f - f_C|^{p-2}(f - f_C)\, f_n \to_n 0$$

contraddizione.

Esercizi e problemi 5

Problema 1 . Provare che

$$L^p \quad \text{separabile} \quad , \quad \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1 \quad \Rightarrow \quad L^q \quad \text{separabile}$$

e, piú in generale, se E é un Banach, allora

$$E' \quad \text{separabile} \qquad \Rightarrow \quad E \quad \text{separabile}$$

Provare con un esempio che l'implicazione E separabile $\Rightarrow$ E' separabile é falsa.

Suggerimento. Usare il 'fatto' seguente: se V é sottospazio chiuso proprio di E, allora esiste un $x' \in E'$, $x' \neq 0$ tale che $x'(x) = 0$ per ogni $x \in V$

Problema 2. Sia $p \geq 2$. Provare che $\|.\|_p$ é **uniformemente convessa**:

$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists \delta_\epsilon > 0 : \quad \|f\|, \|g\| \leq 1 \quad \|f-g\|_p \geq \epsilon \quad \Rightarrow \quad \|\frac{f+g}{2}\|_p \leq 1-\delta_\epsilon$$

Suggerimento: usare la diseguaglianza di Hanner

Problema 3. Sia $p \geq 2$. Provare che

$$f_n \rightharpoonup_n f, \quad \|f_n\|_p \to \|f\|_p \quad \Rightarrow \quad \|f_n - f\|_p \to 0$$

Suggerimento: usare la uniforme convessitá della norma

Esercizio 1 . Dare un esempio di L^p non separabile.

Esercizio 2. Sia $f_n \rightharpoonup_n f$ in L^p, $p > 1$.

(i) Provare con un esempio che f_n può non convergere in alcun punto, può non convergere in misura. Può accadere che f_n non abbia alcuna sottosuccessione convergente q.o.?

(ii)Provare che se $f_n(x) \to g(x)$ q.o. allora $g = f$ q.o.

(iii) Provare che se $\int |f_n|^p \to \int |f|^p$ allora f_n ha almeno una sottosuccesione convergente q.o. ad f.

Esercizio 3 Sia $f_n \to f$ quasi ovunque. Provare che

$$\mu(E) < +\infty \quad \Rightarrow \quad f_n\chi_E \to f\chi_E \quad \text{in misura}$$

Esercizio 4 Sia $f_n \in L^p$ limitata: $\sup_n ||f_n||_p < +\infty$. Provare che

$f_n \to f$ q.o., oppure in misura, $\Rightarrow$ f_n converge a f debolmente.

Suggerimento Fissata $\phi \in L^1 \cap L^q$, usare la diseguaglianza

$$|\int (f_n - f)\phi| \le (||f_n||_p + ||f||_p)(\int_{\{x:|f_n(x)-f(x)|\ge\delta\}} |\phi|^q)^{\frac{1}{q}} + \delta \int |\phi|$$

Esercizio 5 Siano $f_n \in L^p$. Provare che

(i)$f_n \to f$ in misura, $f_n \to \overline{f}$ in misura $\Rightarrow f = \overline{f}$ q.o.

(ii)$f_n \to f$ in misura, $f_n \to \overline{f}$ q.o. $\Rightarrow f = \overline{f}$ q.o.

(iii)$f_n \to f$ in misura, $f_n \to \overline{f}$ in $L^p, \Rightarrow f = \overline{f}$ q.o.

(iv)$f_n \to f$ q.o., $f_n \to \overline{f}$ in $L^p, \Rightarrow f = \overline{f}$ q.o.

(v)$f_n \to f$ debolmente $f_n \to \overline{f}$ debolmente $\Rightarrow f = \overline{f}$ q.o.

(vi)$f_n \to f$ debolmente $f_n \to \overline{f}$ in misura $\Rightarrow f = \overline{f}$ q.o.

(vii)$f_n \to f$ debolmente $f_n \to \overline{f}$ q.o. $\Rightarrow f = \overline{f}$ q.o.

Esercizio 6 Sia $f \in L^p$. Provare che

(i) $\mu(\{x \in \mathbf{R}^{n+1} : |f|^p \ge t\}) \le \frac{||f||_p^p}{t}$

(ii) $t^p\mu(\{x \in \mathbf{R}^{n+1} : |f(x)| \ge t\}) \to 0$ al tendere di t a 0 e a $+\infty$.

Provare con un esempio che tale condizione non garantisce l'appartenenza di f ad L^p.

(iii) Sia $\mu(X) < +\infty$. Siano $f_n \in L^p, p > 1$, tale che $\sup_n ||f_n||_p < +\infty$, e $f_n \to f, q.o.$. Provare che $f_n \to f$ in $L^q \quad \forall q < p$.

CENNI DI SOLUZIONI

Problema 1 . Sia D denso in L^p. Sia $g \in L^q$. Allora

$$f := |g|^{q-2}g \in L^p \quad \Rightarrow \quad \exists f_n \in D: \quad f_n \to f \quad q.o. f_n \quad \text{equidominata in} \quad L^p$$

$$\Rightarrow \quad g_n := |f_n|^{p-2}f_n \to |f|^{p-2}f = g \quad \text{equidominata in} \quad L^q$$

$$\Rightarrow \quad \{|f|^{p-2}f : \quad f \in D\} \quad \text{é denso in} L^q$$

Sia E' separabile, $\{x'_n : \quad n \in \mathbf{N}\}$ denso in E'. Sia

$$x_n \in E : \qquad \|x_n\| = 1, \quad x'_n(x_n) \geq \frac{1}{2}\|x'_n\|. \qquad \text{Allora}$$

$$x'(x_n) = 0 \quad \forall n \in \mathbf{N} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}\|x'_n\| \leq x'_n(x_n) = x'_n(x_n) - x'(x_n) \leq \|x'_n - x'\| \quad \forall n \in \mathbf{N}$$

$$\Rightarrow \quad \|x'\| \leq \|x' - x'_n\| + \|x'_n\| \leq 3\|x' - x'_n\| \quad \forall n \in \mathbf{N} \quad \Rightarrow \quad x' = 0$$

Ció comporta che V, chiusura di $< x_n >$, é densa (altrimenti esisterebbe $x' \in E'$, non nullo che si annulla su V) e quindi anche l'insieme delle combinazioni lineari degli x_n e a coefficenti razionali (che é un insieme numerabile) é denso in E.

Un esempio é dato da l^1, che é separabile (le combinazioni lineari dei vettori $e_i, i \in \mathbf{N}, \ e_i(j) = \delta_{ij}$ sono dense in l^1) mentre il suo duale, che é l^∞, non é separabile: l'insieme $\{x_{ij} = e_i + e_j : \quad i, j \in \mathbf{N}\}$ é non numerabile e $i, j \neq l, m \quad \Rightarrow$ $\|x_{ij} - x_{l,m}\|_\infty = \sup_n |x_{ij}(n) - x_{l,m}(n)| = 1$ e quindi esiste una famiglia non numerabile di palle disgiunte; un insieme denso, dovendo intersecare ogni palla, é dunque necessariamente non numerabile.

Problema 2. Da Hanner (scriveremo $\|.\|_p = \|.\|$):

$$\|f\| = \|g\| = 1 \quad \Rightarrow \quad 2^p \geq \|f + g\|^p + \|f - g\|^p \quad \Rightarrow \quad \|\frac{f+g}{2}\|^p \leq 1 - \epsilon$$

se $\|\frac{f-g}{2}\|^p \geq \epsilon$. Ora, supponiamo esistano f_n, g_n con

$$\|f_n\|, \|g_n\| \leq 1 : \quad \|\frac{f_n - g_n}{2}\| \geq \delta \quad \text{e} \quad \|\frac{f_n + g_n}{2}\| \to 1$$

Intanto $\|f_n\|, \|g_n\| \to 1$, perché $\|f_n\| + \|g_n\| \leq r < 2 \quad \Rightarrow \quad \|\frac{f_n+g_n}{2}\| \leq \frac{r}{2} < 1.$

$$\text{Dunque} \qquad \|f_n - \frac{f_n}{\|f_n\|}\| \to 0, \quad \|g_n - \frac{g_n}{\|g_n\|}\| \to 0$$

ovvero $\quad f_n = \dfrac{f_n}{\|f_n\|} + z_n,\ \ z_n \to 0, \quad g_n = \dfrac{g_n}{\|g_n\|} + w_n, \quad w_n \to 0.$ Ora,

$$\|\frac{f_n}{\|f_n\|} - \frac{g_n}{\|g_n\|}\| = \|f_n - g_n + (w_n - z_n)\| \geq 2\delta - [\|w_n\| + \|z_n\|] \ \Rightarrow\ \|\frac{\frac{f_n}{\|f_n\|} + \frac{g_n}{\|g_n\|}}{2}\| \geq 1 - \frac{\delta}{2}$$

mentre dovrebbe essere $\qquad \lim_n \|\dfrac{\frac{f_n}{\|f_n\|} + \frac{g_n}{\|g_n\|}}{2}\| = \lim_n \|\dfrac{f_n + g_n}{2}\| = 1$

Problema 3. Facilmente,

$$\frac{f_n}{\|f_n\|} \rightharpoonup \frac{f}{\|f\|} \quad \text{e} \quad \|\frac{f_n}{\|f_n\|} - \frac{f}{\|f\|}\|_p \to 0 \quad \Rightarrow \quad \|f_n - f\|_p \to 0$$

Possiamo quindi supporre, ($f \neq 0$ e) dividendo per $\|f_n\|$, $\quad \|f_n\| = \|f\| = 1$.

Quindi $\qquad f_n \rightharpoonup f \quad \Rightarrow \quad \dfrac{f_n + f}{2} \rightharpoonup f \quad \Rightarrow \quad \liminf \|\dfrac{f_n + f}{2}\| \geq \|f\| = 1$

Dall'uniforme convessitá segue allora che $\quad \|f_n - f\|_p \to 0$.

Esercizio 1 . Sia X insieme non numerabile, dotato della misura che conta . Gli elementi di $L^p(X,\mu)$ dati da $\quad f = \chi_{\{x\}}, x \in X \quad$ hanno la proprietá

$$x \neq y \quad \Rightarrow \quad \|\chi_{\{x\}} - \chi_{\{y\}}\|_p = 2^{\frac{1}{p}}$$

Dunque esiste in $L^p(X,\mu)$ un insieme non numerabile di palle disgiunte e quindi ogni insieme denso in $L^p(X,\mu)$, dovendo intersecare ognuna di queste palle, é necessariamente non numerabile.

Esercizio 3 $\quad f_n \to f$ quasi ovunque implica

$$0 = \mu(\{x \in E : \limsup_n |f_n(x) - f(x)| > 0\}) = \mu(\cup_j \cap_n \cup_{k\geq n} \{x \in E : |f_n(x) - f(x)| > \frac{1}{j}\})$$

$$\geq \mu(\cap_n \cup_{k\geq n} \{x \in E : |f_n(x) - f(x)| > \frac{1}{j}\})$$

e quindi, dato che $\mu(E) < +\infty$, otteniamo

$$\mu(\{x \in E : |f_n(x) - f(x)| > \frac{1}{j}\} \leq \mu(\cup_{k\geq n}\{x \in E : |f_n(x) - f(x)| > \frac{1}{j}\})$$

$$\to_n \mu(\cap_n \cup_{k\geq n} \{x \in E : |f_n(x) - f(x)| > \frac{1}{j}\}) = 0$$

Esercizio 4 Sia $g \in L^1 \cap L^q$. Se $f_n \to f$ in misura, allora

$$\limsup_n |\int (f_n - f)\, g| \leq (||f_n||_p + ||f||_p) \limsup_n (\int_{\{x:|f_n(x)-f(x)| \geq \delta\}} |g|^q)^{\frac{1}{q}} + \delta \int |g|$$

$$\leq \delta \int |g| \quad \forall \delta > 0$$

Basta ora osservare che $L^1 \cap L^q$ é denso in L^q. Infatti, se $0 \leq g \in L^q$, é $g = \lim_N \sum_{j=1}^N \frac{\chi_{E_j}}{j}$ con $\sum_{j=1}^N \frac{\chi_{E_j}}{j} \in L^q$ e quindi anche in L^1. Poi, scrivi $g = g^+ - g^-$.

Se $f_n \to f$ quasi ovunque, e $g = \sum_{j=1}^N \frac{\chi_{E_j}}{j} \in L^q$ e quindi $\mu(E_j) < +\infty \quad \forall j$ e quindi $f_n \to f$ in misura su ogni E_j, come sopra si ha che $\limsup_n |\int (f_n - f)\, g| = 0$.

Esercizio 5

(i) $f_n \to f$ in misura $\Rightarrow$ $\exists f_{n_k} \to f$ q.o. Passando eventualmente di nuovo ad una sottosuccessione possiamo supporre $f_{n_k} \to \overline{f}$ q.o. Dunque $f = \overline{f}$ q.o.

(ii) come in (i)

(iii) segue da (i), perché $f_n \to \overline{f}$ in L^p $\Rightarrow$ $f_n \to \overline{f}$ in misura

(iv) segue dal fatto che $f_n \to \overline{f}$ in L^p $\Rightarrow$ $\exists f_{n_k} \to \overline{f}$ q.o.

(v) $\int f_n g \to \int f g$, $\int f_n g \to \int \overline{f} g \quad \forall g \in L^q$ $\Rightarrow$ $\int (f - \overline{f}) g = 0 \quad \forall g \in L^q$ $\Rightarrow$ $f - \overline{f} = 0$ q.o.

(vi)-(vii) $f_n \to f$ debolmente $\Rightarrow$ f_n limitata, fatto che, insieme a $f_n \to \overline{f}$ in misura oppure q.o. implica $f_n \to \overline{f}$ debolmente, e quindi $f = \overline{f}$ q.o. per (v)

Esercizio 6 $\int_{\{|f(x)| \geq t\}} |f|^p \geq t^p \mu(\{|f(x)| \geq t\})$ e $|f|^p \in L^1$ $\Rightarrow$

$$\mu(\{|f(x)| \geq t\}) \to_{t \to +\infty} \mu(\{|f(x)| = +\infty\}) = 0 \;\Rightarrow\; \int_{\{|f(x)| \geq t\}} |f|^p \to_{t \to +\infty} 0$$

Esercizio 7 $\mu(X) < +\infty$, $f_n \to f, q.o.$ $\Rightarrow$ $f_n \to f$ in misura $\Rightarrow$ $\mu(\{x : |f_n(x) - f(x)| \geq \epsilon\} \to_n 0$. Dunque

$$\limsup_n \int |f_n - f|^q \leq \limsup_n \int_{\{x:|f_n(x)-f(x)| \geq \epsilon\}} |f_n - f|^q + \epsilon^q \mu(X) \leq$$

$$\limsup_n \left[\int_{\{x:|f_n(x)-f(x)| \geq \epsilon\}} |f_n - f|^p \right]^{\frac{q}{p}} \mu(\{x : |f_n(x) - f(x)| \geq \epsilon\})^{\frac{p-q}{p}} + \epsilon^q \mu(X) = +\epsilon^q \mu(X)$$

AM5 2008: Tracce delle lezioni- 6

LO SPAZIO L^∞: DUALITÁ E COMPATTEZZA DEBOLE*

Sia μ misura su X. $\quad L^\infty = L^\infty(X,\Sigma,\mu) :=$

$\{f| \quad f$ é misurabile ed esiste $\quad c > 0 : \quad |f(x)| \le c \quad$ quasi per ogni $\quad x\}$

e $\qquad \|f\|_\infty := \inf\{c \ge 0 : \quad |f(x)| \le c \quad \text{q.o.} \quad x\} =$

$= \|f\|_\infty := \min\{c \ge 0 : \quad |f(x)| \le c \quad \text{q.o.} \quad x\}$, $\qquad$ perché

$$\mu(\{x: \ |f(x)| \ > \ \|f\|_\infty\}) \ = \ \mu\Big(\cup_n \{x: \ |f(x)| \ > \ \|f\|_\infty + \frac{1}{n}\}\Big) = 0$$

É facile vedere che $\quad (L^\infty, \|.\|_\infty)$ **é un Banach.**

L^∞ é il duale di L^1

Se $\quad \mu \quad$ é σ-finita, allora $\quad (L^1)'$ **é isometricamente isomorfo a** $\quad L^\infty$

TEOREMA DELLA MEDIA.

Sia $g \in L^1$. Se $\quad m \le \frac{1}{\mu(E)} \int\limits_E g \le M \quad \forall E \in \Sigma \quad$ con $0 < \mu(E) < +\infty$, allora

$$m \le g \le M \quad q.o.$$

Prova. $\int |g| < +\infty \ \Rightarrow \ \mu(\{x : g(x) \ge M + \frac{1}{n}\}) < \infty \quad$ ed allora é anche $\mu(\{x : g(x) \ge M + \frac{1}{n}\}) = 0$ perché, se no,

$$M \ge \frac{1}{\mu(\{x : g(x) \ge M + \frac{1}{n}\})} \int\limits_{\{x:g(x)\ge M+\frac{1}{n}\}} g \ \ge M + \frac{1}{n}$$

Dunque $\mu(\{x : g(x) > M\}) = \mu(\cup_n\{x : g(x) \ge M + \frac{1}{n}\}) = 0$. Ugualmente $\mu(\{x : g(x) < m\}) = 0$.

Prova del Teorema di isomorfismo. Data $\quad g \in L^\infty$, $\quad$ sia

$T(g) := l_g, \qquad l_g(f) = \int fg \quad \forall f \in L^1. \qquad$ É $\quad |l_g(f)| = |\int fg| \le \|f\|_1 \|g\|_\infty$

Dunque $\quad l_g \quad$ é un funzionale lineare e continuo su L^1 con

$$\|l_g\| \le \|g\|_\infty$$

T **é isometria** (chiaramente lineare). Si tratta di provare che $\|l_g\| \geq \|g\|_\infty$. Sia $X = \cup_j E_j$, $E_j \subset E_{j+1}$, $\mu(E_j) < +\infty$. Allora $g_j := g\chi_{E_j} \in L^1$.
É $\left|\frac{1}{\mu(E)} \int\limits_E g_j\right| = \left|\frac{1}{\mu(E)} \int g \, \chi_{E\cap E_j}\right| = \frac{l_g(\chi_{E\cap E_j})}{\mu(E)} \leq \frac{\|l_g\| \, \mu(E\cap E_j)}{\mu(E)} \leq \|l_g\|$ e quindi, per il Teorema della Media, $\|g_j\|_\infty \leq \|l_g\|$ e quindi $\|g\|_\infty \leq \|l_g\|$.

T **é suriettiva.** Sia $X = \cup_j E_j$, $E_i \cap E_j = \emptyset$, $\mu(E_j) < +\infty$. Dato $l \in (L^1)'$, sia $l_j(f) := l(f\chi_{E_j})$. Da

$$|l_j(f)| \leq \|l\| \, \|f\chi_{E_j}\|_1 \leq \|l\| \sqrt{\mu(E_j)} \, \|f\|_2 \qquad \forall f \in L^2$$

segue che l_j é lineare e continuo su L^2 e quindi

$$\exists g_j \in L^2 : \qquad l(f\chi_{E_j}) = l_j(f) = \int f \, g_j \qquad \forall f \in L^2$$

Allora, presa $f = \chi_{E_i} \, sign \, g_j$, si ha che, se $i \neq j$, $0 = l(\chi_{E_i} \, sign \, g_j \, \chi_{E_j}) = \int\limits_{E_i} |g_j|$ e quindi $g_j = 0$ q.o. in E_j^c. In particolare $g_j \in L^1$ e quindi, dal teorema della media e

$$\left|\frac{1}{\mu(E)} \int\limits_E g_j\right| = \frac{l(\chi_{E\cap E_j})}{\mu(E)} \leq \|l\|$$

segue che $g_j \in L^\infty$. Ora, se $f \in L^1$, allora $f_{|E_j}$ é approssimabile in $L^1(E_j)$ mediante funzioni L^2 e quindi, dalla limitatezza di g_j e dalla continuitá di l segue che

$$l(f\chi_{E_j}) = l_j(f) = \int fg_j \qquad \forall f \in L^1$$

Infine, siccome $\sum_{j=1}^n f\chi_{E_j}$ converge a f in L^1, dalla continuitá di l segue che

$$l(f) = \sum_j l(f\chi_{E_j}) = \sum \int fg_j = \int f(\sum_j g_j)$$

ove $\|\sum_j g_j\|_\infty \leq \|l\|$.

Il duale di L^∞ non é L^1

Data $g \in L^1(X,\mu)$, *sia* $l_g(f) := \int_X fg d\mu$, $f \in L^\infty$. $L(g) := l_g$ *é* **isometria lineare** *di* L^1 *in* $(L^\infty)'$, *ma* **non** *é, in generale,* **suriettiva**.

Da $|l_g(f)| \leq \|g\|_1 \ \|f\|_\infty$, segue che $l_g \in (L^\infty)'$ e $\|Lg\|_\infty \leq \|g\|_1$: L é operatore lineare continuo di L^1 in $(L^\infty)'$. Di piú, presa $f = sign\ g$, $\|l_g\| \geq \int |g|$.
Controesempio. Se

$$l(\varphi) := \varphi(0) \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^N)$$

l é funzionale lineare continuo su C_0^∞, e, per il Teorema di Hahn-Banach, l ha un prolungamento lineare e continuo su tutto L^∞, che indichiamo ancora con l. Se esistesse $g \in L^1$ tale che $l(f) = \int gf$, $\forall f \in L^\infty$ sarebbe

$$\varphi(0) \quad = \quad \int g(x)\varphi(nx)dx \to_n 0 \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^N) \quad ; \quad \text{contraddizione se } \varphi(0) \neq 0.$$

Convergenza debole in L^1. Siano $f_n \in L^1$.

$$f_n \rightharpoonup f \quad \text{in} \quad L^1 \quad \Leftrightarrow \quad \int (f_n - f)h \to 0 \quad \forall h \in L^\infty$$

Convergenza debole in L^∞. Siano $f_n \in L^\infty$.

$$f_n \rightharpoonup f \quad \text{in} \quad L^\infty \quad \Leftrightarrow \quad l(f_n) \to l(f) \quad \forall l \in (L^\infty)'$$

Convergenza debole* in L^∞. Siano $f_n \in L^\infty$.

$$f_n \rightharpoonup^* f \quad \text{in} \quad L^\infty \quad \Leftrightarrow \quad \int f_n\, h \to \int f\, h \quad \forall h \in L^1$$

NOTA. Diversamente da quanto accade in $L^p, p \in (1, +\infty)$, **successioni limitate in L^1 o in L^∞ non hanno, in generale, estratte debolmente convergenti**.

(i) Sia $f \in C_0^\infty(\mathbf{R}^N)$, $f \geq 0$, $\int f = 1$, $f_n(x) := n^N f(nx)$. É $\int\limits_{\mathbf{R}^N} |f_n|dx = \int\limits_{\mathbf{R}^N} |f|$.
Supponiamo che esistano $\hat{f} \in L^1$ ed f_{n_k} tali che $\int f_{n_k} g \to \int \hat{f} g$ $\forall g \in C_0^\infty$. Quindi

$$\int \hat{f} g = \lim_k \int\limits_{\mathbf{R}^N} f_{n_k}(x)g(x)dx \ = \ \lim_k \int\limits_{\mathbf{R}^N} f(y) \ g(\frac{y}{n_k})dy = g(0) \qquad \forall g \in C_0(\mathbf{R}^N)$$

e quindi $g(0) = \int\limits_{\mathbf{R}^N} \hat{f}(x)g(jx)dx \to_j 0$ che é assurdo se $g(0) \neq 0$.
(ii) Siano $f_n = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(nt)$, $t \in [0, 2\pi]$. Tali funzioni formano un sistema ortonormale in $L^2([0, 2\pi]$ e quindi convergono debolmente a zero in L^2. Di piú, si ha

Lemma (Riemann-Lebesgue) $f_n \rightharpoonup^* 0$: $\int\limits_0^{2\pi} \sin(nt)\, g(t)dt \to_n 0 \qquad \forall g \in L^1$

La successione f_n non ha peró estratte debolmente convergenti in L^∞. Segue da

1. Se $\phi_n \in C([0, 2\pi])$ tende debolmente a zero in L^∞ allora $\phi_n(t) \to_n 0 \quad \forall t$.
2. Ogni sottosuccessione f_{n_k} converge al piú su un insieme di misura nulla.

Il fatto 1. si vede considerando $l_t(\phi) := \phi(t)$, $t \in [0, 2\pi]$. Tale l_t é funzionale lineare e continuo (rispetto alla norma del sup) su $C([0, 2\pi])$, ed é quindi, per Hahn-Banach, restrizione di un $l \in (L^\infty)'$. Ovviamente $l_t(\phi_n) \to_n 0 \Leftrightarrow \phi_n(t) \to_n 0$.
Il fatto 2. segue da Riemann-Lebesgue ed é lasciato come esercizio.

Compattezza debole* (Teorema di Banach-Alaoglu). *Siano μ σ-finita ed $L^1(\mu)$ separabile. Allora*

$$\sup_n \|f_n\|_\infty < +\infty \;\Rightarrow\; \exists n_k,\; f \in L^\infty : \quad f_{n_k} \rightharpoonup^* f$$

Infatti : $\sup_n |\int f_n h| \le (\sup_n \|f_n\|_\infty)\, \|h\|_1 \;\; \forall\, h \in L^1 \Rightarrow$ (procedimento diagonale di Cantor !) $\exists n_k$: $\quad l(h) := \lim_k \int f_{n_k} h \quad$ esiste finito $\quad \forall h \in D \subset L^1$ numerabile e denso; l si prolunga in modo lineare e continuo a tutto L^1 e quindi

$$\exists g \in L^\infty : \quad \lim_k \int f_{n_k} h = l(h) = \int gh \quad \forall h \in D$$

e quindi (in modo standard) $\quad \lim_k \int f_{n_k} h = \int gh \quad \forall h \in L^1$.

Funzionali lineari continui e misure. Sia $l \in (L^\infty(X, \Sigma, \mu))'$. Allora

$$\exists g \in L^1 : \quad l(f) = \int fg d\mu \qquad \forall f \in L^\infty \;\Leftrightarrow\; \quad (f_n \rightharpoonup^* 0 \;\Rightarrow\; l(f_n) \to 0)$$

$\Rightarrow$. Ovvio. $\quad\Leftarrow$. Proviamolo nell'ipotesi aggiuntiva $\quad f \ge 0 \Rightarrow l(f) \ge 0$. In tal caso $\mu_l(E) := l(\chi_E)$, $E \in \Sigma$ é misura perché $\quad E_j \in \Sigma$, $E_i \cap E_j = \emptyset \quad \forall i \ne j \Rightarrow \chi_{\cup_{j \ge n+1} E_j} \to_n 0\, \forall x \;\Rightarrow\; \int \chi_{\cup_{j\ge 1} E_j}\; h \to_n 0 \quad \forall h \in L^1 \;\Rightarrow\; l(\chi_{\cup_{j\ge n+1}E_j}) \to_n 0 \;\Rightarrow$

$$\mu_l(\cup_{j=1}^\infty E_j) = \sum_{j=1}^n l(\chi_{E_j}) + l(\chi_{\cup_{j\ge n+1}E_j}) = \sum_{j=1}^n \mu_l(E_j) + l(\chi_{\cup_{j\ge n+1}E_j}) \to_n \sum_{j=1}^\infty \mu_l(E_j)$$

Ora, per linearitá, $\quad l(\varphi) = \int \varphi d\mu_l \quad$ se $\varphi = \sum_{j=1}^n c_j \chi_{E_j}$.
Poi, se $0 \le \varphi_j \le f \in L^\infty(\mu)$ tende puntualmente ed in modo monotono a f, é $\int \varphi_j d\mu_l \to_j \int f d\mu_l$. Ma, per Lebesgue, é anche $\int \varphi_j h d\mu \to \int f h d\mu \quad \forall h \in L^1(\mu)$ e quindi $\int \varphi_j d\mu_l = l(\varphi_j) \to_j l(f)$. Quindi $\quad \int f d\mu_l = l(f) \quad$ e, scrivendo $f = f^+ - f^-$,

$$l(f) = \int f d\mu_l \qquad \forall f \in L^\infty(\mu)$$

Infine, $\mu(E) = 0 \Rightarrow \nu_l(E) = l(\chi_E) = 0$, ed il fatto che esista $g \in L^1(\mu)$ tale che $\quad \int f d\mu_l = \int fg d\mu \quad \forall f \in L^\infty(\mu) \quad$ é conseguenza del seguente Teorema di rappresentazione

IL TEOREMA DI RADON-NIKODYM

Sia $\Sigma \subset \mathcal{P}(X)$ *sigma algebra ; siano* $\nu, \mu : \Sigma \to [0, +\infty]$ *misure, rispettivamente finita,* σ*- finita. Allora* $\exists f \in L^1(X, \mu)$, $\exists Z \in \Sigma$ *con* $\mu(Z) = 0$ *tali che*

$$\nu(E) = \int_E f d\mu + \nu(E \cap Z) \quad \forall E \in \Sigma$$

Prova. Sia $\lambda(E) := \mu(E) + \nu(E)$, $E \in \Sigma$, per cui per ogni φ semplice e non negativa, $\int \varphi\, d\lambda = \int \varphi\, d\mu + \int \varphi\, d\nu$ e quindi, per ogni h Σ-misurabile

$$\int |h|\, d\lambda = \int |h|\, d\mu + \int |h|\, d\nu \qquad \int |h|\, d\lambda \geq \int |h|\, d\mu, \qquad \int |h|\, d\lambda \geq \int |h|\, d\nu$$

In particolare, $L^1(\lambda) \subset L^1(\nu)$ e $h \to \int h\, d\nu$ é continuo in $L^1(\lambda)$ e quindi

$$(*) \qquad \exists g \in L^\infty(\lambda) : \quad \int h\, d\nu = \int g\, h\, d\lambda \quad \forall h \in L^1(\lambda)$$

Inoltre, $\lambda(E) > 0 \Rightarrow 0 \leq \frac{1}{\lambda(E)} \int\limits_E g\, d\lambda = \frac{1}{\lambda(E)} \int \chi_E\, d\nu = \frac{\nu(E)}{\lambda(E)} \leq 1 \Rightarrow$

$$0 \leq g \leq 1 \qquad \lambda - q.o.$$

Iteriamo ora $(*)$:

$$(**) \qquad \int h\, d\nu = \int g\, h\, d\lambda = \int gh\, d\mu + \int g^2\, h\, d\lambda = \int (g + g^2) h\, d\mu + \int g^2\, h\, d\nu$$

$$= \ldots\ldots = \int (g + g^2 + \ldots + g^n)\, h\, d\mu + \int g^n\, h\, d\nu \quad \forall h \in L^1(\lambda)$$

In particolare, posto $h \equiv 1$ in $(**)$, vediamo che

$$\nu(X) \geq \int \left(\sum_n g^n \right) d\mu \quad \text{e quindi} \quad \sum_n g^n(x) < +\infty \quad \mu - q.o. \quad \text{e} \quad \mu(\{h = 1\}) = 0$$

Poniamo $f := \sum_n g^n \in L^1(\mu)$ $Z := \{h = 1\}$. Fissata in $(**)$ h limitata e in $L^1(\lambda)$, passando al limite troviamo $\int h\, d\nu = \int h\, f\, d\mu + \int\limits_Z h\, d\nu$. Sia infine h soltanto limitata (e misurabile) e sia $X = \cup_j E_j$, $E_j \in \Sigma$, $\mu(E_j) < +\infty$, $E_j \subset E_{j+1}$. Allora $\int h\, \chi_{E_j}\, d\nu = \int h\, \chi_{E_j}\, f\, d\mu + \int\limits_Z h \chi_{E_j}\, d\nu$ e passando al limite in j otteniamo

$$\int h\, d\nu = \int h\, f\, d\mu + \int\limits_Z h\, d\nu \qquad \forall h \quad \text{misurabile e limitata}$$

Misure assolutamente continue
misure singolari e Teorema di decomposizione di Lebesgue.

Siano μ, ν misure (σ-finita, finita) definite sulla σ-algebra $\Sigma \subset \mathcal{P}(X)$:

$\nu \prec\prec \mu$ (ν é **assolutamente continua** rispetto a μ) se $\mu(E) = 0 \;\Rightarrow\; \nu(E) = 0$.
ν é **singolare** rispetto a μ $(\nu \perp \mu)$ $\Leftrightarrow$ $\exists Z \in \Sigma : \mu(Z) = 0, \nu(Z^c) = 0$

É vero che : $\exists\ \nu_{ac} \prec\prec \mu,\ \nu_s \perp \mu$ unicamente determinate : $\nu = \nu_{ac} + \nu_s$

Che tale decomposizione esista segue dal Teorema di Radon-Nikodym:

$$\exists h \in L^1_\mu, \quad Z \in \Sigma, \quad \mu(Z) = 0 : \quad \nu(E) = \int_E h d\mu + \nu(Z \cap E) = \nu_{ac}(E) + \nu_s(E)$$

$$\nu_{ac}(E) := \int_E h d\mu, \qquad \nu_s(E) := \nu(Z \cap E)$$

L'unicitá é poi facile da verificare.

IL TEOREMA DI RAPPRESENTAZIONE DI RIESZ

Sia l *funzionale lineare su* $C_0(\mathbf{R}^N)$ *tale che* $l(\varphi) \geq 0$ *se* $\varphi \geq 0$. *Allora*

$$\exists \quad \mu \quad \textit{misura di Radon tale che} \qquad l(\varphi) = \int_{\mathbf{R}^N} \varphi\, d\mu \qquad \forall \varphi \in C_0(\mathbf{R}^N)$$

Prova. Sia

$\mu(\Omega) :=\ \sup\{l(\varphi) :\ \varphi \in C_0(\mathbf{R}^N),\ 0 \leq \varphi \leq 1,\ supp\, \varphi \subset \Omega\},\ \forall \Omega \subset \mathbf{R}^N$, aperto

$\mu(A) :=\quad \inf\{\sum_j \mu(\Omega_j) :\quad A \subset \cup_j \Omega_j \quad \Omega_j \subset \mathbf{R}^N$ aperti$\}$

Passo 1. μ é misura (ovvero, é numerabilmente subadditiva)

Passo 2. μ é misura di Radon (ovvero é Borel regolare, finita sui compatti)

Passo 3. $l(\varphi) = \int_{\mathbf{R}^N} \varphi\, d\mu \quad \forall \varphi \in C_0(\mathbf{R}^N)$.

Prova passo 1. Siano $\Omega \subset \cup_j \Omega_j$ aperti, $K :=\ supp\ \varphi \subset \Omega$. Siccome K é compatto, esiste n tale che $K \subset \cup_{j=1}^n \Omega_j$. Sia ψ_j partizione dell'unitá:

$$0 \leq \psi_j \leq 1, \quad supp\, \psi_j \subset \Omega_j, \quad \sum_{j=1}^n \psi_j(x) = 1 \quad \forall x \in K$$

Allora

$$l(\varphi) \;=\; l(\sum_{j=1}^{n} \psi\,\psi_j) \;\;=\;\; \sum_{j=1}^{n} l(\psi\psi_j) \;\;\leq\;\; \sum_{j=1}^{\infty} \mu(\Omega_j) \qquad\qquad (\text{perché} \quad supp\ \psi_j \subset \Omega_j)$$

e quindi $\mu(\Omega) \leq \sum\limits_j \mu(\Omega_j)$. In particolare $\mu(\Omega) = \inf\{\sum_j \mu(\Omega_j) : \quad \Omega \subset \cup_j \Omega_j\}$
Sia ora $A \subset \cup_i A_i$. Possiamo supporre $\mu(A_i) < +\infty \quad \forall i$. Sia $A_i \subset \cup_j \Omega_{ij}$ e

$$\mu(A_i) + \frac{\epsilon}{2^i} \geq \sum_j \mu(\Omega_{ij})$$

Allora $\epsilon + \sum\limits_i \mu(A_i) \geq \sum\limits_{ij} \mu(\Omega_{ij}) \geq \mu(A)$.

Prova passo 2. Proviamo che μ é misura metrica.
Se $\Omega_i, i = 1,2$ sono aperti disgiunti e $supp\,\varphi_i \subset \Omega_i$, $0 \leq \varphi_i \leq 1$ allora $supp\,[\varphi_1 + \varphi_2] \subset \Omega_1 \cap \Omega_2$ e $0 \leq \varphi_1 + \varphi_2 \leq 1$ e quindi

$$l(\varphi_1) + l(\varphi_2) = l(\varphi_1 + \varphi_2) \leq \mu(\Omega_1 \cap \Omega_2) \quad \text{e quindi} \quad \mu(\Omega_1) + \mu(\Omega_2) \leq \mu(\Omega_1 \cap \Omega_2)$$

Allora, se $d(A_1, A_2) > 0$, esistono Ω_i aperti disgiunti tali che $A_i \subset \Omega_j$ e quindi, se $A_1 \cup A_2 \subset \Omega$ aperto, risulta

$$\mu(\Omega) \geq \mu([\Omega \cap \Omega_1] \cup [\Omega \cap \Omega_2]) = \mu(\Omega \cap \Omega_1) + \mu(\Omega \cap \Omega_2) \geq \mu(A_1) + \mu(A_2)$$

Passando all'inf: $\mu(A_1 \cup A_2) \geq \mu(A_1) + \mu(A_2)$ e quindi μ é misura metrica e quindi boreliana.
Poi , μ é Borel regolare, perché $\mu(A) = \mu(\cap \Omega_j)$ se $\mu(A) < +\infty, \mu(A) + \frac{1}{j} \geq \mu(\Omega_j)$.
Infine, $\mu(K) < +\infty$ se K é compatto. E ció segue subito dal fatto che, essendo l positivo, si ha che

$$\forall K \quad \text{compatto} \quad \exists c_K : \quad supp\ \varphi \subset K \quad \Rightarrow \quad |l(\varphi)| \leq c_K\ \|\varphi\|_\infty$$

Infatti, fissato Ω aperto limitato contenente K, sia $\psi \in C_0(\mathbf{R}^N)$ tale che $0 \leq \psi \leq 1$ con $supp\ \psi \subset \Omega$ e $\psi \equiv 1$ in K. Allora

$$\|\varphi\|_\infty\, \psi \geq \varphi \geq 0 \quad \Rightarrow \quad l(\varphi) \leq\ l(\|\varphi\|_\infty\, \psi) = \|\varphi\|_\infty\, l(\psi)$$

Siccome é anche $l(-\varphi) \leq \|\varphi\|_\infty\, l(\psi)$, concludiamo che $|l(\varphi)| \leq \|\varphi\|_\infty\, l(\psi)$.

Prova passo 3. Sia $K := supp\,\varphi \in C_0(\mathbf{R}^N)$. Fissato $\epsilon > 0$, siano

$$t_0 < \inf\ \varphi < t_1 \ldots < t_n = \sup\ \varphi \quad \text{tali che} \quad t_j - t_{j-1} < \epsilon \quad \forall j$$

e siano

$$E_j := \varphi^{-1}((t_{j-1}, t_j]) \cap K \subset \Omega_j : \quad \mu(\Omega_j) \le \mu(E_j) + \frac{\epsilon}{n}, \quad \varphi(x) \le t_j + \epsilon \quad \forall x \in \Omega_j, \quad \forall j$$

Notiamo che gli E_j sono disgiunti e $K = \cup_j E_j$. Sia ψ_j partizione dell'unitá:

$$0 \le \psi_j \le 1, \quad \textit{supp}\ \psi_j \subset \Omega_j, \quad \sum_j \psi_j(x) = 1 \quad \forall x \in K$$

e quindi $\varphi \equiv \sum_j \varphi\ \psi_j$. Ora,

$$t_j - \epsilon < t_{j-1} < \varphi(x) \quad \forall x \in E_j, \quad \psi_j\,\varphi \le (t_j + \epsilon)\,\psi_j \quad \Rightarrow$$

$$l(\varphi) = \sum_{j=1}^{n} l(\varphi\,\psi_j) \le \sum_{j=1}^{n} (t_j + \epsilon) l(\psi_j) \le$$

$$\le \sum_{j=1}^{n} (t_j + \epsilon)\,\mu(\Omega_j) \le \sum_{j=1}^{n} (t_j + \epsilon)\,\left[\mu(E_j) + \frac{\epsilon}{n}\right] =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} (t_j + \epsilon)\mu(E_j) + \sum_{j=1}^{n} (t_j + \epsilon)\frac{\epsilon}{n} = \sum_{j=1}^{n} (t_j - \epsilon)\mu(E_j) + 2\epsilon\mu(K) + \epsilon(\sup\varphi + \epsilon) \le$$

$$\le \sum_{j=1}^{n} \int_{E_j} \varphi\, d\mu + \epsilon[\,2\mu(K) + \sup\varphi + \epsilon\,] =$$

$$= \int_{\mathbf{R}^N} \varphi\, d\mu + \epsilon[\,2\mu(K) + \sup\varphi + \epsilon\,]$$

Ma é anche $l(-\varphi) \le \int_{\mathbf{R}^N} [-\varphi]\, d\mu$, e quindi $l(\varphi) = \int \varphi\, d\mu$.

NOTA. Esattamente come per la misura di Lebesgue si vede che

$$\forall E \quad \text{boreliano} \qquad \mu(E) = \sup\{\mu(K) : \quad K \subset E, \quad K \quad \text{compatto}\}$$

Ció comporta l'**unicitá di** μ:

se $l(\varphi) = \int \varphi d\nu = \int \varphi d\mu \quad \forall \varphi \in C_0(\mathbf{R}^N)$, allora, dato un compatto K e preso un aperto Ω contenente K e tale che $\nu(K) + \epsilon \ge \nu(\Omega)$, e presa una $\varphi \in C_0(\mathbf{R}^N)$ tale che $0 \le \varphi \le 1$, $\textit{supp}\,\varphi \subset \Omega, \varphi \equiv 1$ su K si ha

$$\mu(K) = \int_K d\mu \le \int \varphi d\mu = l(\varphi) = \int_K d\nu \le \nu(\Omega) \le \nu(K) + \epsilon$$

Convergenza debole e compattezza per misure di Radon

Definizione. Siano μ_n misure di Radon in $\mathbf{R}^N$. Diremo che

$\mu_n \rightharpoonup \mu$ (converge debolmente a μ) se $\displaystyle\int_{\mathbf{R}^N} \varphi \, d\mu_n \to \int_{\mathbf{R}^N} \varphi \, d\mu \quad \forall \varphi \in C_0(\mathbf{R}^N)$

Esempio. (i) Siano $0 \leq f_n$, $f_n \in L^1(\mathbf{R}^N)$, $\mu_n(E) := \int_E f_n dx$, E boreliano. Allora $\mu_n \rightharpoonup \mu \quad \Leftrightarrow \quad \int_{\mathbf{R}^N} f_n \; \varphi dx \to \int_{\mathbf{R}^N} \varphi d\mu, \quad \forall \varphi \in C_0(\mathbf{R}^N)$.

(ii) Sia $f \in C_0^\infty(\mathbf{R}^N)$, $\int |f| = 1$, $f_n(x) := n^N |f(nx)|$, $\mu_n(E) := \int_{\mathbf{R}^N} f_n dx$. Allora $\mu_n \rightharpoonup \delta_0$, ove $\delta_0(E) = 1$ se $0 \in E$ e $\delta_0(E) = 1$ se $0 \notin E$.

Teorema *Siano μ_n misure di Radon tali che* $\sup_n \mu_n(B_R) < +\infty$ $\forall R$. *Allora*

$$\exists n_k, \mu : \quad \mu_{n_k} \rightharpoonup_k \mu$$

Prova. Dal Teorema di approssimazione di Weierstrass segue che esiste un insieme numerabile $D \subset C_0^\infty(\mathbf{R}^N)$ tale che

$$\forall \varphi \in C_0(\mathbf{R}^N), \quad \exists R > 0, \quad \exists \varphi_n \in D \cap C_0(B_R) \quad \text{tale che} \quad \|\varphi_n - \varphi\|_\infty \to_n 0$$

Dall'ipotesi segue che $\forall \varphi \in C_0(\mathbf{R}^N)$, $\sup_n |\int_{\mathbf{R}^N} \varphi \, d\mu_n| < +\infty$ e quindi l'argomento diagonale di Cantor assicura che

$$\exists \mu_{n_k} : \quad l(\varphi) := \lim_k \int_{\mathbf{R}^N} \varphi \, d\mu_{n_k} \qquad \text{esiste finito} \quad \forall \varphi \in < D >$$

e, ovviamente, l é lineare e positivo e quindi

$$\forall R > 0, \quad \exists c_R : \qquad |l(\varphi)| \quad \leq \quad c_R \; \|\varphi\|_\infty \quad \forall \varphi \in C_0(B_R)$$

Ció implica che, se $\varphi_n \in C_0(B_R) \cap < D >$, $\|\varphi_n - \varphi\|_\infty \to_n 0$ allora $\lim_n l(\varphi_n)$ esiste finito e dipende solo da φ, ovvero l si estende a un funzionale lineare e positivo su $C_0(\mathbf{R}^N)$. In virtú del Teorema di Riesz esiste una misura di Radon μ tale che

$$l(\varphi) = \int_{\mathbf{R}^N} \varphi \, d\mu \; = \; \lim_k \int_{\mathbf{R}^N} \varphi \, d\mu_{n_k} \quad \forall \varphi \in < D >$$

Da ció segue facilmente che la convergenza ha infatti luogo su tutto $C_0(\mathbf{R}^N)$.

Esercizi e problemi 6

Esercizio 1. Provare che l^∞ non é separabile.
Trovare una successione $l_n \in (l^\infty)'$ limitata, che non ha estratte debole* convergenti.

Esercizio 2. Sia $c_0 := \{x \in l^\infty : \quad x(j) \to_j 0\}$.

(i) Provare che c_0 é sottospazio lineare chiuso di l^∞ e che

$$\forall a \in l^\infty, \quad \exists a_n \in c_0 : \qquad a_n \rightharpoonup^\star a$$

(non é in particolare vero che $x_n \in C \subset l^\infty$ chiuso e convesso, $x_n \rightharpoonup^\star x$ in $l^\infty \quad \Rightarrow \quad x \in C$).

(ii) Sia $h \in l^1$. Posto $l_h(x) := \int_{\mathbf{N}} h\, x = \sum_j h(j)\, x(j) \quad \forall x \in c_0$, provare che $Lh := l_h$ é una isometria lineare suriettiva di l^1 su $(c_0)'$ (l^1 é il duale di c_0...ma c_0 non é il duale di l^1!).

(iii) Mostrare con un esempio che non tutte le successioni limitate in c_0 hanno estratte debolmente convergenti.

Esercizio 3. Provare che

$$x_n \in l^1, \quad x_n \rightharpoonup_n x \quad \Rightarrow \quad \|x_n - x\|_1 \to_n 0$$

Esercizio 4. Sia f misurabile. Provare che

(i) $\sup_{p \geq 1} \|f\|_p < +\infty \quad \Rightarrow \quad f \in L^\infty$

(ii) $f \in L^1 \cap L^\infty \quad \Rightarrow \quad f \in L^p \quad \forall p > 1$ e $\|f\|_p \to \|f\|_\infty$

Esercizio 5. Sia $l(\varphi) = \int\limits_{\mathbf{R}^N} \varphi\, d\nu$, ν misura di Radon.

Supponiamo che l si prolunghi a tutto $L^\infty(\mathbf{R}^N, dx)$ in un funzionale della forma $\int\limits_{\mathbf{R}^N} \varphi\, f\, dx$ con $f \in L^1(\mathbf{R}^N)$.

Provare che ν é assolutamente continua rispetto alla misura di Lebesgue.

CENNI DI SOLUZIONI

Esercizio 1. Sia $A := \{x : \mathbf{N} \to \{0,1\}\ \} = 2^{\mathbf{N}}$. Come noto, A non é numerabile (ha la potenza del continuo). Siccome

$$x, y \in A, \quad x \neq y \quad \Rightarrow \quad \|x - y\|_\infty = 1$$

esiste in l^∞ una famiglia non numerabile di palle disgiunte: un insieme denso in l^∞ , dovendo intersecare ciascuna di tali palle, non puó dunque essere numerabile.

Sia $l_n(x) := x(n) \quad \forall x \in l^\infty$. É

$$|l_n(x)| = |x(n)| \leq \sup_j |x(j)| = \|x\|_\infty \quad \text{e quindi} \quad \|l_n\| = 1$$

(infatti, se $e_n(j) := 0$ se $j \neq n$ e $e_n(n) := 1$, allora $l_n(e_n) = 1$).
Siccome $l_{n_k} \rightharpoonup^\star l \quad \Leftrightarrow \quad x(n_k) = l_{n_k}(x) \to l(x)$ implica, in particolare, che $x(n_k)$ converge, tale l non puó esistere perché, quale che sia la selezione n_k esiste una successione limitata x tale che la $k \to x(n_k)$ non converga.

Esercizio 2. (i) Chiaramente,

$$x_n(j) \to_j 0 \quad \forall n, \quad \sup_j |x_n(j) - x(j)| \to_n 0 \quad \Rightarrow$$

$$|x(j)| \quad \leq \quad |x(j) - x_n(j)| + |x_n(j)| \quad \leq \quad 2\epsilon$$

se $n = n_\epsilon$ é abbastanza grande e $j \geq j(n_\epsilon)$, ovvero $x \in c_0$ e quindi c_0 é chiuso in l^∞.

Ricordiamo qui che, pensato $\mathbf{N}$ munito della misura che conta, i corrispondenti L^p si indicano l^p. In particolare, l^∞ é il duale di l^1:

$$\forall\, h \in l^\infty, \quad l_h(x) := \int_{\mathbf{N}} h\, x = \sum_{j=1}^{\infty} h(j)\, x(j) \quad \forall x \in l^1, \quad e \quad Lh := l_h$$

é isometria lineare suriettiva di l^∞ su $(l^1)'$. Esempio: se $b_n := \chi_{\{1,\dots,n\}}$, $b_n \in c_0$ e $l_{b_n}(x) := \int_{\mathbf{N}} b_n\, x = \sum_{j=1}^{n} x(j) \quad \forall x \in l^1$. Si ha $l_{b_n}(x) \to_n \sum_{j=1}^{\infty} x(j) = \int_{\mathbf{N}} x = l_{\chi_{\mathbf{N}}}$ ovvero $b_n \rightharpoonup^\star \chi_{\mathbf{N}} \notin c_0$. Piú in generale, $\forall a \in \mathbf{N}$ e posto $a_n := a\, b_n$, risulta

$$l_{a_n}(x) = \sum_j x(j)\, a_n(j) = \sum_{j=1}^{n} x(j)\, a(j) \to_n \sum_{j=1}^{\infty} x(j)\, a(j) = l_a(x) \quad \forall x \in l^1$$

ovvero $\quad a_n \rightharpoonup^\star a$ in l^∞.

(ii) Se, per $\quad h \in l^1, \quad Lh := l_h, \quad l_h(x) := \sum_j h(j)\, x(j), \quad Lh$ é funzionale lineare e continuo su l^∞ e quindi anche su c_0 con $\quad \|l_h\| = \|h\|_1 \quad$ perché $|l_h(x)| \le \|x\|_\infty \sum_j |h(j)| \quad$ e, viceversa, posto $\quad x_n(j) := sign\, h(j)\, b_n(j) \quad$ risulta $x_n \in c_0, \quad \|x_n\|_\infty = 1 \quad$ e quindi $\quad \|l_h\| \ge l_h(x_n) = \sum_{j=1}^n |h(j)| \quad \forall n$.

Suriettivitá di L. $\quad$ Sia $\quad l \in (c_0)' \quad$ e , posto $\quad e_n := \chi_{\{n\}} \in c_0, \quad$ sia $h := (l(e_j))_{j\in\mathbf{N}}$. $\quad$ Intanto, $\quad h \in l^1, \quad$ perché $\quad \sum\limits_{j=1}^n |h(j)| =$

$$l(\sum_{j=1}^n sign\ h(j)\, e_j) \le \|l\|\ \|\sum_{j=1}^n sign\ h(j)\, e_j\|_\infty \le \|l\| \ \Rightarrow\ \sum_{j=1}^\infty |h(j)| \le \|l\| < \infty$$

Infine $\qquad \|x - b_n\, x\|_\infty = \sup\limits_{j\ge n+1} |x(j)| \to_n 0 \quad \forall x \in c_0 \qquad \Rightarrow$

$$l(x) = \lim_n l(x\, b_n) = \lim_n [\sum_{j=1}^n l(x(j)e_j) = \sum_{j=1}^\infty x(j)\, l(e_j) = l_h(x)$$

(iii) $\quad$ Come in (ii): $b_n := \chi_{\{1,\ldots,n\}} \rightharpoonup^\star \chi_{\mathbf{N}} \notin c_0$. In particolare, $l_{b_n}(e_j) \to_n 1 \quad \forall j$.

Esercizio 3. $\quad$ Per assurdo (passando eventualmente ad una sottosuccessione)

$\exists x_n \rightharpoonup 0$ in l^1 $\;$ tale che $\;\|x_n\|_1 \ge \delta > 0, \quad$ e quindi, sostituendo $\;x_n\;$ con $\;\frac{x_n}{\|x_n\|_1}$

$$\exists x_n \rightharpoonup 0 \quad \text{con} \quad \|x_n\|_1 = 1 \quad \forall n \in \mathbf{N}$$

Da $\;x_n \rightharpoonup 0\;$ ovvero $\quad \sum\limits_j x_n(j)\, a(j) \to_n 0 \quad \forall a \in l^\infty \;$ segue, prendendo $\;a = \chi_{\{i\}}$,

$$x_n(i) \to_n 0 \quad \forall i \in \mathbf{N}$$

Quindi, per ogni fissato $\quad m \in \mathbf{N}, \qquad \sum\limits_{j>m} |x_n(j)| > \frac{3}{4} \quad \forall n \ge n_m$

Siano poi $\quad k_1 < l_1 \quad$ tali che $\qquad \sum\limits_{j=k_1}^{l_1} |x_1(j)| \ge \frac{3}{4}$.

Detto $n_1 = 1$, sia n_2 tale che se $k_2 > l_1$ ed $l_2 > k_2$ é abbastanza grande risulti

$$\sum_{j=k_2}^{l_2} |x_{n_2}(j)| \ge \frac{3}{4}$$

Iterando, si costruisce una sottosuccessione $\quad x_{n_i} \quad$ tale che, se $\quad k_i > l_{i-1} \quad$ ed l_i é abbastanza grande risulti

$$\forall i \in \mathbf{N} : \qquad \sum_{j=k_i}^{l_i} |x_{n_i}(j)| \ \ge\ \frac{3}{4} \quad \text{e quindi} \quad \sum_{j<k_i} |x_{n_i}(j)| + \sum_{j>l_i} |x_{n_i}(j)| \le \frac{1}{4}$$

Se $\quad a(j) = \; sign \; x_{n_i}(j) \;\; \forall j = k_i, \ldots, l_i, \;\;$ é $\quad a \in l^\infty$ e quindi $\;\; \sum_j x_{n_i}(j)\, a(j) \to_i 0$

mentre $\quad \displaystyle\sum_j x_{n_i}(j)\, a(j) \geq \sum_{j=k_i}^{l_i} |x_{n_i}(j)| - \left[\sum_{j<k_i} |x_{n_i}(j)| + \sum_{j>l_i} |x_{n_i}(j)| \right] \geq \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$

contraddizione.

Esercizio 4. (i) Sia $\mu(\{x: \; |f(x)| \geq c\}) > 0$. Allora

$$\sup_{p\geq 1}(\int |f|^p)^{\frac{1}{p}} \geq (\int_{\{x:\,|f(x)|\geq c\}} |f|^p)^{\frac{1}{p}} \geq c\mu(\{x: \; |f(x)| \geq c\})^{\frac{1}{p}} \;\Rightarrow\; \sup_{p\geq 1}(\int |f|^p)^{\frac{1}{p}} \geq$$

$$\geq c \limsup_{p\to+\infty} \mu(\{x: \quad |f(x)| \geq c\})^{\frac{1}{p}} = c \quad \Rightarrow \quad \mu(\{x: \quad |f(x)| \geq c\}) = 0$$

se $c > \sup_{p\geq 1}(\int |f|^p)^{\frac{1}{p}}$ e quindi $\quad \|f\|_\infty \leq \sup_{p\geq 1}(\int |f|^p)^{\frac{1}{p}}$

(ii) $\quad p > 1 \quad \Rightarrow \quad \int |f|^p = \int |f| \; |f|^{p-1} \leq \|f\|_1 \; \|f\|_\infty^{p-1}$

$$\Rightarrow \quad \|f\|_p \leq \|f\|_1^{\frac{1}{p}} \; \|f\|_\infty^{\frac{p-1}{p}} \quad \Rightarrow \quad \limsup_{p\to+\infty} \|f\|_p \leq \|f\|_\infty$$

Poi, $\quad c < \|f\|_\infty \quad \Rightarrow \quad \mu(\{x: \quad |f(x)| \geq c\}) > 0 \quad$ ed allora

$$\|f\|_p \geq c\, \mu(\{x: \; |f(x)| \geq c\})^{\frac{1}{p}} \;\Rightarrow\; \liminf_{p\to+\infty} \|f\|_p \geq c \;\Rightarrow\; \liminf_{p\to+\infty} \|f\|_p \geq \|f\|_\infty$$

Esercizio 5. $\quad l(\varphi) := \int\limits_{\mathbf{R}^N} \varphi \, d\nu, \quad \varphi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^N) \quad$ é funzionale lineare e continuo su $C_0(\mathbf{R}^N)$, sottospazio lineare di $L^\infty(\mathbf{R}^N, dx)$

(dx indichi la misura di Lebesgue in $\mathbf{R}^N$; notiamo che nella classe delle funzioni uguali q.o. a una $\varphi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^N), \varphi$ é l'unico rappresentante continuo).

Per Hahn-Banach, l ha un prolungamento lineare e continuo su tutto $L^\infty(\mathbf{R}^N, dx)$.

Supponiamo esista $\quad g \in L^1: \quad l(f) = \int gf, \quad \forall f \in L^\infty$. Allora, se E boreliano di misura (di Lebesgue) nulla, si ha che

χ_E é limite q.o. di una successione $\quad \varphi_n \in C_0(\mathbf{R}^N)$, con $\chi_E \leq \varphi_n(x) \leq 1 \quad \forall x$ e quindi

$$l(\varphi_n) = \int \varphi_n \, g \to_n \int \chi_E \, g = 0$$

(per il Teorema di Lebesgue).Ció implica

$$\int \chi_E \, d\nu \leq \underline{\lim}_n \int \varphi_n \, d\nu = \underline{\lim}_n l(\varphi_n) = \underline{\lim}_n \int \varphi_n \, g = 0$$