Esecitazione AM3 n.6-A.A. 2007-2008

Forme differenziali e formule di Gauss-Green

1. Calcolare i seguenti integrale delle forme differenziali ω lungo curve ϕ: $\int_\phi \omega$ con
   - $\omega(x,y) = x\,y^2\,\mathrm{d}\,x + (x+y)\,\mathrm{d}y$ e $\phi : [0, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}^2$, $\phi(t) = (\cos t, \sin t)$;
   - $\omega(x,y) = \frac{y^2}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}\,x - \frac{x^2}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}y$ e $\phi : [0,\pi] \to \mathbb{R}^2$, $\phi(t) = (2\cos t, 2\sin t)$.
2. Verificare se sono esatte le seguenti forme differenziali e eventulmente trovare la primitiva:
   - $\omega(x,y) = 2\;x\,y\mathrm{d}\,x + (x^2+y^2)\mathrm{d}y$;
   - $\omega(x,y,z) = y\mathrm{d}\,x + (x+z)\mathrm{d}y + y\,\mathrm{d}z$;
   - $\omega(x,y) = [(x+y+1)e^x - e^y]\mathrm{d}\,x + [e^x - (x+y+1)e^y]\mathrm{d},y$;
   - $\omega(x,y) = (x^2+y^2)\mathrm{d}\,x + (x^2-y^2)\mathrm{d}y$; calcolare $\int_\phi \omega$ con $\phi(t) = (\cos t, \sin t)$, $t \in [0, 2\,\pi]$;
     LAVORO A CASA
   - $\omega(x,y) = \frac{2\;x\,y^2}{(1+x^2+y^2)^2}\mathrm{d}\,x + \frac{2\,x^2\,y}{(1+x^2+y^2)^2}\mathrm{d}y$;
   - $\omega(x,y) = (y\,e^x - e^y)\mathrm{d}\,x + (e^x - x\,e^y)\mathrm{d}y$;
3. Calcolare l'integrale curvilineo:
   - $$\int_\phi \frac{2-x}{2+y}\mathrm{d}\,x - \frac{2-y}{2+x}\mathrm{d}\,y$$
     dove ϕ é la curva regolare il cui sostegno é il triangolo di vertici $(0,0), (1,0), (-1,0)$ orientato in verso antiorario e $x \neq -2$, $y \neq -2$.
   - $$\int_\phi \frac{x}{x^2+y^2+1}\mathrm{d}\,x - \frac{y}{x^2+y^2+1}\mathrm{d}\,y$$
     dove ϕ é il quarto di circonferenza di raggio 1 e centro l'origine avente $x, y > 0$ orientata in verso antiorario.

- $$\int_\phi \frac{y^2}{x}\mathrm{d}\,x - 2\,y\,\log x \mathrm{d}\,y$$

  dove $\phi : [\frac{\pi}{2}, \pi] \to \mathbb{R}^2$, $\phi(t) = (t, \arctan \frac{2\cos(3\,t)}{2-\sin t})$.

4. Stabilire per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ la seguente forma differenziale é esatta e calcolare la primitiva:

   $$\omega(x,y,z) = 2\,x\,z\,\mathrm{d}x + (\alpha^2 + 2\,\alpha)z^2\mathrm{d}y + (6\,y\,z + \alpha\,x^2)\mathrm{d}\,z.$$

5. $$\omega(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2+1}\mathrm{d}\,x + \frac{y}{x^2+\,p\,y^2+1}\mathrm{d}\,y,$$

   $p \geq 0$ Determinare per quali valori di p risulta che $\int_\phi \omega = 0$ dove ϕ é una qualsiasi curva chiusa generalmente regolare con sostegno in $\mathbb{R}^2$. Calcolare $\int_\varphi \omega$ dove φ é il quarto di circonferenza di raggio 1 e centro l'origine avente $x, y > 0$ orientata in verso antiorario.

6. LAVORO A CASA
   Sia
   $$\omega(x,y) = \frac{2\,x-y}{x^2+y^2}\mathrm{d}\,x + \frac{2\,y+x}{x^2+y^2}\mathrm{d}\,y$$

   definita in $\mathbb{R}^2 \setminus \{\,(0,0)\,\}$. Dire se ω é esatta in $\mathbb{R}^2 \setminus \{\,(0,0)\,\}$. Dimostrare che ω é esatta in $\{\,(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\, x, y > 0\,\}$ e calcolare una primitiva.

7. LAVORO A CASA
   Calcolare
   $$\int_\phi \frac{x^2+x+y^2}{(1+x)^2+y^2}\mathrm{d}\,x - \frac{y}{(1-x)^2+y^2}\mathrm{d}\,y$$

   dove ϕ é data da $\{\,x^2 + \frac{1}{4}y^2 = 1\ \ , x, y \geq 0\,\}$ e percorsa in verso antiorario.

8. Calcolare la misura dell'ellisse di semiassi $a, b > 0$ tramite le formule di Gauss-Green.

9. Calcolare l'area racchiusa dalla cicloide di equazioni parametriche $x(t) = t - \sin t$, $y(t) = 1 - \cos t$ con $t \in [0, 2\,\pi]$, tramite le formule di Gauss-Green.