

# AM3 Tutorato 2

A.A. 2007-2008

Docente: Prof. P. Esposito

Tutori: G. Mancini, D. Piras

Tutorato 2 del 26 Febbraio 2008

**Esercizio 1** Date le seguenti funzioni stabilire se in un intorno dei punti indicati è possibile scrivere l'insieme di livello  $\{F = 0\}$  come grafico di una funzione  $y = g(x)$ . Fornire inoltre una stima dell'intorno di definizione della funzione  $g$  e svilupparla in serie di Taylor al secondo ordine

1.  $F(x, y) = 1 - e^y + \sin x$  in  $(0, 0)$
2.  $F(x, y) = e^y - \cos x + \log(1 + x^2 y^2)$  in  $(0, 0)$
3.  $F(x, y) = x \sin(y - \sin y) + y + \log x$  in  $(1, 0)$
4.  $F(x_1, x_2, y) = y^2 + \cos(x_1 x_2) - 2$  in  $(0, 0, 1)$
5.  $F(x_1, x_2, y) = \sin(y x_1 x_2 + \pi y) + \arctan x_1 x_2$  in  $(0, 0, 0)$

**Esercizio 2** Sia  $F(x, y) = 2y^6 - \sin^3 x$ . Stabilire se in un intorno del punto  $(0, 0)$  è possibile scrivere l'insieme  $\{F = 0\}$  come grafico di una funzione di classe  $C^1$ .

**Esercizio 3** Sia  $F(x, y) = y^4 - x^2 + x$

1. Stabilire per quali valori di  $c$  la curva di livello  $\Gamma_c = \{(x, y) | F(x, y) = c\}$  è localmente un grafico cartesiano
2. Disegnare  $\Gamma_c$  al variare di  $c$

**Esercizio 4** Sia  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$   $F(x, y) = (x^3 + x, \arctan y - e^{x^2})$

1. Dimostrare che  $F$  è invertibile
2. Stabilire se  $F^{-1}$  è di classe  $C^1$
3. Calcolare  $J(F^{-1})(0, -1)$

**Esercizio 5** Sia  $A \in \text{Mat}(m \times n)$  dimostrare che  $\|A\| \leq \sqrt{nm} \|A\|_\infty$   
(dove  $\|A\|_\infty = \max_{i,j} |a_{ij}|$ )

**Esercizio 6** Sia  $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$   $F(x, y_1, y_2) = ((x+1) \arctan y_1, e^{-y_1} \sin 2y_2 + \cos(\frac{\pi}{2} + x))$   
Mostrare che  $\exists g : B_r(0) \rightarrow B_\rho(0, 0)$  di classe  $C^1$  tale che  $f(x, g(x)) = 0$   
 $\forall x \in B_r(0)$  e stimare i raggi  $r$  e  $\rho$