**Università di Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica**

# AM3 Soluzioni Tutorato 3

**A.A. 2007-2008**
**Docente: Prof. P. Esposito**
**Tutori: G. Mancini, D. Piras**
**Tutorato 3 del 4 Marzo 2008**

**Esercizio 1** $f(x,y) = xe^{1-x^2+y^2}$
Sia $g(x,y) = x^4 - x^2 + y^2 = 0$
$\nabla f(x,y) = ((1-2x^2)e^{1-x^2+y^2}, 2xye^{1-x^2-y^2})$
$\nabla g(x,y) = (4x^3 - 2x, 2y) = (2x(2x^2-1), 2y)$. L'unico punto di $C$ in cui $\nabla g(x,y)$ si annulla è il punto $(0,0)$. Per il teorema dei moltiplicatori di Lagrange in un punto di massimo o minimo (diverso da $(0,0)$ ) della funzione $f$ su $C$ si deve avere $\nabla f(x,y) = \lambda \nabla g(x,y),$. Risolviamo dunque il sistema
$$\begin{cases} (1-2x^2)e^{1-x^2+y^2} = 2x\lambda(2x^2-1) \\ 2xye^{1-x^2+y^2} = 2\lambda y \\ x^4 - x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$
-Se $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ allora dall' equazione di $C$ si ricava che $y = \pm\frac{1}{2}$
-Se $y = 0$ dall'equazione di $C$ si ricava che $x = 0 \vee x = \pm 1$
-Se $y \neq 0$ e $x \neq \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ otteniamo il sistema $\begin{cases} e^{1-x^2+y^2} = -2x\lambda \\ xe^{1-x^2+y^2} = \lambda \\ x^4 - x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$ Le prime due equazioni sono però incompatibili dunque in questo caso il sistema non ha soluzioni
I possibil punti stazionari di $f$ su $C$ sono quindi $(0,0), (\pm 1, 0), (\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm\frac{1}{2})$ e $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm\frac{1}{2})$
$f(0,0) = 0$, $f(\pm 1, 0) = \pm 1$, $f(\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm\frac{1}{2}) = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{\frac{3}{4}}$, $f(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm\frac{1}{2}) = -\frac{1}{\sqrt{2}}e^{\frac{3}{4}}$
Dunque il massimo di $f$ è $\frac{1}{\sqrt{2}}e^{\frac{3}{4}}$ mentre il minimo è $-\frac{1}{\sqrt{2}}e^{\frac{3}{4}}$

**Esercizio 2** $f(x,y) = \min\{xy^2 - x, 0\}$
Notiamo che $f \leq 0$ e che ci sono dei punti di $A$ in cui vale 0 quindi 0 è il massimo di $f$.
Studiando il segno di $xy^2 - x$ si vede che in $A$ la funzione $f$ vale 0 se $x \leq 0$ dunque ci basta studiare $f$ nell'insieme $A_1 = \{(x,y) \mid x^2 + 4y^2 = 4,\ x > 0\}$
$$\begin{cases} y^2 - 1 = 2\lambda x \\ 2xy = 8\lambda y \\ x^2 + 4y^2 = 4 \end{cases}$$
-Se $y = 0$ allora $x = \pm 2$
-se $y \neq 0$ allora $\begin{cases} y^2 - 1 = 2\lambda x \\ x = 4\lambda \\ x^2 + 4y^2 = 4 \end{cases}$ Dalla seconda equazione ricaviamo che $\lambda = \frac{x}{4}$ e dunque sostituendo nella prima troviamo $y^2 - 1 = \frac{x^2}{2}$ cioè $x^2 =$

$2y^2 - 2$. Sostituendo nell'equazione del vincolo otteniamo $6y^2 = 6 \Rightarrow y = \pm 1$ e dunque $x = 0$. L'unica soluzione del sistema all'interno dell'insieme $A_1$ è $(2, 0)$
$f(2, 0) = -2$ dunque il massimo di $f$ in $A$ è 0 mentre il minimo è $-2$

**Esercizio 3** $f(x, y, z) = 5x^2 + 3y^2 + 2z^2$
$\nabla f(x, y, z) = (10x, 6y, 4z)$
Non ci sono punti stazionari di $f$ nell' interno di $A$ quindi basta studiare la funzione f su $\partial A = A_1 \cup A_2$ dove $A_1 = \{(x, y, z) \mid 0 \leq z = 1 - x^2 - y^2\}$ e $A_2 = \{(x, y, 0) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$
Cerchiamo i punti critici di $f$ su $A_1$. Sia $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z - 1$. $\nabla g(x, y, z) = (2x, 2y, 1)$. Risolviamo il sistema $\begin{cases} 10x = 2\lambda x \\ 6y = 2\lambda y \\ 4z = \lambda \\ x^2 + y^2 + z = 1 \end{cases}$
-Se $xy \neq 0$ le prime due equazioni non sono compatibili
-Se $x = 0$ otteniamo che $\begin{cases} 6y = 2\lambda y \\ 4z = \lambda \\ y^2 + z = 1 \end{cases}$ Dalla prima equazione otteniamo che $y = 0 \vee \lambda = 3$. Se $y = 0$ dall' ultima equazione ricaviamo che $z = 1$. se invece $\lambda = 3$ avremo che $z = \frac{3}{4}$ e $y = \pm\frac{1}{2}$.
-Se $x \neq 0$ allora necessariamente $y = 0$ e $\lambda = 5$ quindi $z = \frac{5}{4}$ ma in questo caso si dovebbe avere $x^2 + \frac{5}{4} = 1$ quindi non ci sono soluzioni
Le soluzioni del sistema sono dunque $(0, 0, 1), (0, \pm\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$
Cerchiamo ora i punti critici su $A_2$.
Notiamo che $f(x, y, 0) = 5x^2 + 3y^3 = h(x, y)$ dunque dobbiamo studiare la funzione $h$ nell'insieme $x^2+y^2 \leq 1$. $\nabla h(x, y) = (10x, 6y) = (0, 0) \Leftrightarrow (x, y) = (0, 0)$. Cerchiamo ora le soluzioni del sistema $\begin{cases} 10x = 2\lambda x \\ 6y = 2\lambda y \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$
-Se $x = 0$ otteniamo $y = \pm 1$
-Se $y = 0$ otteniamo $x = \pm 1$
-Se $xy \neq 0$ abbiamo un sistema che non ha soluzioni
Riassumendo possiamo dire che i possibili punti critici di $f$ sono $(0, 0, 0), (\pm 1, 0, 0), (0, \pm 1, 0)(0, 0, 1), (0, \frac{1}{2}, \frac{3}{4})$
$f(0, 0, 0) = 0,\ f(\pm 1, 0, 0) = 5,\ f(0, \pm 1, 0) = 3,\ f(0, 0, 1) = 2,\ f(0, \pm\frac{1}{2}, \frac{3}{4}) = \frac{15}{8}$. Dunque il massimo di $f$ su $A$ è 5 mentre il minimo è 0

**Esercizio 4** $f(x, y, z) = x^2y^2 - x^2y^2z^2$
Notiamo che $f(x, y, z) = x^2y^2(1 - z^2) \geq 0$ e che $f(0, 0, 0) = 0$ dunque $f$ ha un minimo.
$f$ però non ha un massimo perchè ad esempio $\forall n \in \mathbb{N}$ si ha che $(n, n, 0) \in A$ e $f(n, n, 0) = n^4 \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$

**Esercizio 5** a) Sia $f_1(x, y, z) = x + y + z^2$. Notiamo che $\nabla f_1(x, y, z) = (1, 1, 2z)$ dunque $f_1$ non ammette punti critici interni a $D_+$. Cerchiamo dunque i punti critici sul bordo di $D_+$. $\partial D_+ = \{A \cup B\}$ dove $A = \{(x, y, z)|x^2 + y^2 + z^2 = 1, x > 0\}$ e $B = \{(0, y, z)|y^2 + z^2 \leq 1\}$. Per cercare i punti critici su $A$ possiamo utilizzare il metodo dei moltiplicatori di Lagrange risolvendo il sistema $\begin{cases} 1 = 2\lambda x \\ 1 = 2\lambda y \\ 2z = 2\lambda z \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \end{cases}$

Dalle prime due equazioni otteniamo $x = y$ mentre dalla terza si ricava che $z = 0 \vee \lambda = 1$.

Se $z = 0$ allora nell' ultima equazione otteniamo $2x^2 = 1 \Rightarrow x = y = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Se invece $\lambda = 1$ otteniamo che $x = y = \frac{1}{2}$ e $z = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$. Le soluzioni del sistema che stanno in $A$ sono quindi $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$ e $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}})$

Cerchiamo ora i possibili punti critici su $B$.

Notiamo che $f_1(0, y, z) = y + z^2 = g(y, z)$ dunque dobbiamo studiare la funzione $g$ sul disco $y^2 + z^2 \leq 1$.

$\nabla g = (1, 2z)$ dunque g non ha massimi e minimi interni al disco. Per cercare i punti critici sul bordo del disco risolviamo il sistema $\begin{cases} 1 = 2\lambda y \\ 2z = 2\lambda z \\ y^2 + z^2 = 1 \end{cases}$ Dalla seconda equazione ricaviamo che $z = 0 \vee \lambda = 1$. Se $z = 0$ allora $y = \pm 1$ mentre se $\lambda = 1$ otteniamo che $y = \frac{1}{2}$ e $z = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Riassumendo i punti critici di $f$ sono $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0), (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}), (0, \pm 1, 0)$ e $(0, \frac{1}{2}, \pm\frac{\sqrt{3}}{2})$

$f_1(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0) = \sqrt{2}$, $f_1(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}) = \frac{3}{2}$, $f_1(0, \pm 1, 0) = \pm 1$, $f_1(0, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}) = \frac{5}{4}$.

Dunque il massimo di $f_1$ su $D_+$ è $\frac{3}{2}$ mentre il minimo è $-1$

b) Sia $f_2(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ notiamo che su $D_-$ si ha che $0 \leq f_2 \leq 1$ e che $f(0, 0, 0) = 0$ e $f(-1, 0, 0) = 1$ dunque il massimo di $f$ su $D_-$ è 1 mentre il minimo è 0.

c) Notiamo che per $x > 0$ si ha $f = f_1$ e che per $x \leq 0$ si ha $f = f_2$. In particolare siccome $-1 \leq f_1 \leq \frac{3}{2}$ e $0 \leq f_2 \leq 1$ avremo che $-1 \leq f \leq \frac{3}{2}$. Inoltre abbiamo che $f(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}) = f_1(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}) = \frac{3}{2}$ quindi $\frac{3}{2}$ è il massimo di $f$ su $D$ ed è assunto nei punti $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}})$. Notiamo inoltre che $\forall n \in \mathbb{N}$ si ha che $(\frac{1}{n}, -1 + \frac{1}{n}, 0) \in D$ e che $f(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, 0) = \frac{2}{n} - 1 \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} -1$. Dunque $-1$ è l'estremo inferiore di $f$ su $D$ e non è un minimo perchè non è assunto in nessun punto.

**Esercizio 6** $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy + \frac{1}{2}\sin(xy) > \pi\}$ $f(x, y) = \frac{1}{x^2+y^2}$

a) $A$ non è compatto perchè non è limitato infatti ad esempio $\forall n \in \mathbb{N}$ con $n \leq 4$ la successione $P_n = (n, 1)$ è contenuta in $A$ (perchè siccome $g(t) = t + \frac{1}{2}\sin t$ è monotona $n + \frac{1}{2}\sin n \geq 4 + \frac{1}{2}\sin 4 = g(4) > g(\pi) = \pi$ ) ed è una successione non limitata. (Si poteva anche far vedere che $A$ non è chiuso)

b) $\displaystyle\lim_{|(x,y)|\to\infty} \frac{1}{x^2 + y^2} = 0$

c) Notiamo che $f > 0$ e che$f(n, 1) = \frac{1}{n^2+1} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ dunque $\inf_A f = 0$. Inoltre f è strettamonte positiva quindi 0 non è un massimo.

Notiamo inoltre che se $(x, y) \in A$ si ha che $g(xy) > \pi = g(\pi)$ e quindi siccone $g(t)$ è nonotona si deve avere $xy > \pi$. ma allora $f(x, y) = \frac{1}{x^2+y^2} \leq \frac{1}{2xy} < \frac{1}{2\pi}$. Inoltre $\forall n \in \mathbb{N}$ si ha che $(\sqrt{\pi + \frac{1}{n}}, \sqrt{pi}) \in A$ e $f(\sqrt{\pi + \frac{1}{n}}, \sqrt{\pi}) = \frac{1}{2\pi+\frac{1}{n}} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2\pi}$. Quindi si ha che $\displaystyle\sup_A f = \frac{1}{2\pi}$ e anche in questo caso non si tratta di un massimo.

**Esercizio 7** $f(x, y, z) = xyz$

Sia $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + 4z^2 - 4$

$\nabla f(x, y, z) = (yz, xz, xy)$

$\nabla g(x, y, z) = (2x, 2y, 8z)$

L'unico punto in cui $\nabla f$ si annulla è il punto $(0, 0, 0)$ che però non è interno all'insieme $A$ dunque non ci sono punti stazionari di $f$ all'interno di $A$ cerchamo dunque i punti di massimo e minimo di $f$ sul bordo di A $\partial A = A_1 \cup A_2$ dove $A_1 = \{(x, y, z)|x^2 + y^2 + 4z^2, y < z\}$ e $A_2 = \{(x, y, y)|x^2 + 5y^2 \leq 4\}$.

Cerchamo i punti critici su $A_1$ risolvendo il sistema $\begin{cases} yz = 2\lambda x \\ xz = 2\lambda y \\ xy = 8\lambda z \\ x^2 + y^2 + 4z^2 = 4 \end{cases}$

-Se $x = 0$ abbiamo il sistema $\begin{cases} yz = 0 \\ 0 = 2\lambda y \\ 0 = 8\lambda z \\ y^2 + 4z^2 = 4 \end{cases}$ Dalla prima equazione si ricava che $y = 0 \vee z = 0$. Se $y = 0$ allora $z = \pm 1$ mentre se $z = 0$ otteniamo che $y = \pm 2$

-Se $y = 0$ otteniamo il sistema $\begin{cases} 0 = 2\lambda x \\ xz = 0 \\ 0 = 8\lambda z \\ x^2 + 4z^2 = 4 \end{cases}$ da cui otteniamo che $x = 0$ e $z = \pm 1$ oppure che $z = 0$ e $x = \pm 2$

-Se $z = 0$ abbiamo $\begin{cases} 0 = 2\lambda x \\ 0 = 2\lambda y \\ xy = 0 \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$ da cui o $x = 0$ e $y = \pm 2$ oppure $y = 0$ e $x = \pm 2$

-Se $xyz \neq 0$ dalle prime due equazioni otteniamo $\frac{yz}{x} = \frac{xz}{y} \Rightarrow y^2 z = x^2 z \Rightarrow x^2 = y^2$. Inoltre dalla prima e dalla terza equazione ricaviamo che $4\frac{yz}{x} = \frac{xy}{z} \Rightarrow 4yz^2 = x^2 y \Rightarrow x^2 = y^2 = 4z^2$. sostituendo nella terza equazione si ottiene che $12z^2 = 4 \Rightarrow z = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$

Le soluzioni del sistema sono quindi i punti $(0, 0 \pm 1), (0, \pm 2, 0), (\pm 2, 0, 0)$, $(\pm\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$. Tra questi punti solamente $(0, 0, 1), (0, -2, 0), (\pm 2, 0, 0)$, $(\pm\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}), (\pm\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \pm\frac{1}{\sqrt{3}})$ si trovano in $A_1$

Cerchiamo ora i possibili punti di massimo su $A_2$. Notiamo che $f(x, y, y) = xy^2 = h(x, y)$ dunque studiare $f$ su $A_2$ è equivalente a studiare $h$ sull' ellisse $x^2 + 5y^2 \leq 4$.

$\nabla h(x, y) = (y^2, 2xy)$. Notiamo che tutti i punti $(x, 0)$ con $|x| \leq 2$ sono punti critici di $h$. Cerchiamo i punti critici di $h$ sulla curva $x^2 + 5y^2 = 4$.

$$\begin{cases} y^2 = 2\lambda x \\ 2xy = 10\lambda y \\ x^2 + 5y^2 = 4 \end{cases}$$

-Se $y = 0$ otteniamo $x = \pm 2$

-Se $y \neq 0$ otteniamo $\lambda = \frac{x}{5} \Rightarrow y^2 = \frac{2}{5}x^2$. Sostituendo nell' ultima equazione $x^2 + 2x^2 = 4 \Rightarrow x^2 = \frac{4}{3} \Rightarrow x = \pm\frac{2}{\sqrt{3}}$ e $y = \pm\sqrt{\frac{8}{15}}$. Riassumendo i possibili punti di massimo o minimimo per $f$ su $A$ sono $(0, 0, 1), (0, -2, 0), (\pm 2, 0, 0), (\pm\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$

$(\pm\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}},\pm\frac{1}{\sqrt{3}}),(\pm\frac{2}{\sqrt{3}},\sqrt{\frac{8}{15}},\sqrt{\frac{8}{15}})$ e $(\pm\frac{2}{\sqrt{3}},-\sqrt{\frac{8}{15}},-\sqrt{\frac{8}{15}})$ e i punti $(x,0,0)$ co $|x|\leq 2$

$f(0,0,1)=f(0,-2,0)=f(0,\pm 2,0)=f(x,0,0)=0$ $f((\pm\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}))=\pm\frac{1}{3\sqrt{3}}$ $f(\pm\frac{2}{\sqrt{3}},-\sqrt{\frac{8}{15}},-\sqrt{\frac{8}{15}})=f(\pm\frac{2}{\sqrt{3}},\sqrt{\frac{8}{15}},\sqrt{\frac{8}{15}})=\pm\frac{16}{15\sqrt{3}}$ Dunque il massimo di $f$ su $A$ è $\frac{16}{15\sqrt{3}}$ mentre il minimo è $\frac{16}{15\sqrt{3}}$

**Esercizio 8** $F:\mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{R}^2$ $F(x,y_1,y_2)=(e^{y_1}\cos y_1+(y_2+1)\sin x-1,1-\log(e+x)+y_2+y_1\arctan(1-e^{y_2}))$

Notiamo che $F(0,0,0)=(0,0)$ e che $\dfrac{\partial F}{\partial y}=\begin{pmatrix} e^{y_1}\cos y_1-e^{y_1}\sin y_1 & \sin x\\ \arctan(1-e^{y_2}) & 1+\frac{-y_1e^{y_2}}{1+(1-e^{y_2})^2}\end{pmatrix}$

in particolare

$\dfrac{\partial F}{\partial y}(0,0,0)=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ che è una matrice invertibile con inversa

$T=\left(\dfrac{\partial F}{\partial y}(0,0,0)\right)^{-1}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$

dunque per il teorema della funzione implicita in un intorno del punto $(0,0,0)$ è definita una funzione $g$ con le proprietà che stiamo cercando. Per stimare i raggi $r$ e $\rho$ imponiamo le condizioni $\sup\limits_{B_r(0)}|F(x,0,0)|\leq\dfrac{\rho}{4\|T\|_\infty}$ e

$\sup\limits_{B_r(0)\times B_\rho(0,0)}\left\|1-T\dfrac{\partial F}{\partial y}\right\|_\infty\leq\dfrac{1}{4}$

$|F(x,0,0)|=|(\sin x,\log(e+x))$. Ma $|\sin x|\leq x\leq r$ e

$|\log(e+t)|=\left|\displaystyle\int_0^x\frac{1}{e+t}dt\right|\leq\left|\displaystyle\int_0^x 1dt\right|=|x|\leq r$ dunque $|F(x,0,0)|\leq\sqrt{2}r$.

pertanto se vogliamo che $\sup\limits_{B_r(0)}|F(x,0,0)|\leq\dfrac{\rho}{4}$ possiamo prendere $r\leq\frac{\rho}{4\sqrt{2}}$.

Inoltre $\left\|Id-T\dfrac{\partial F}{\partial y}\right\|_\infty=\left\|\begin{pmatrix}1-e^{y_1}\cos y_1+e^{y_1}\sin y_1 & -\sin x\\ -\arctan(1-e^{y_2}) & \frac{y_1e^{y_2}}{1+(1-e^{y_2})^2}\end{pmatrix}\right\|_\infty$

Ma $|1-e^{y_1}\cos y_1+e^{y_1}\sin y_1|\leq|1-e^{y_1}\cos y_1|+e^{y_1}|\sin y_1|\leq|1-e^{y_1}|+e^{y_1}|1-\cos y_1|+3|y_1|\leq 3|y_1|+\frac{3}{2}|y_1|^2+3|y_1|\leq\frac{15}{2}|y_1|\leq\frac{15}{2}\rho$

$|\sin x|\leq|x|\leq r$

$|\arctan(1-e^{y_2})|\leq|1-e^{y_2}|\leq 3|y_2|\leq 3\rho$

$|\frac{y_1e^{y_2}}{1+(1-e^{y_2})^2}|\leq|y_1e^{y_2}|\leq 3|y_1|\leq 3\rho$

Quindi $\left\|Id-T\frac{\partial F}{\partial y}\right\|_\infty\leq\frac{15}{2}\rho$. Pertanto se vogliamo che $\sup\limits_{B_r(0)\times B_\rho(0,0)}\left\|1-T\dfrac{\partial F}{\partial y}\right\|_\infty\leq\dfrac{1}{4}$

possiamo prendere $\rho\leq\frac{1}{30}$ e $r\leq\frac{\rho}{4\sqrt{2}}$