Università di Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

AM3 Soluzioni Tutorato 1

A.A. 2007-2008
Docente: Prof. P. Esposito
Tutori: G. Mancini, D. Piras
Tutorato 1 del 19 Febbraio 2007

Esercizio 1

1. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2y^3}{x^4+y^4}$

   $\left|\dfrac{x^2y^3}{x^4+y^4}\right| = |y|\dfrac{x^2y^2}{x^4+y^4} \leq \dfrac{1}{2}|y|\dfrac{x^4+y^4}{x^4+y^4} = \dfrac{1}{2}|y| \overset{(x,y)\to(0,0)}{\longrightarrow} 0$

   quindi $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2y^3}{x^4+y^4} = 0$

2. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{e^{xy^2}-1}{x^2+y^4}$

   Il limite non esiste infatti ponendo $f(x,y) = \frac{e^{xy^2}-1}{x^2+y^4}$ si ha che $f(0,y) = 0$

   mentre $\left|f(y^2,y)\right| = \left|\dfrac{e^{y^4}-1}{2y^4}\right| \overset{y\to 0}{\longrightarrow} \dfrac{1}{2}$

3. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy^3}{x^2+\sin^2 y}$

   (Ricordiamo che se $|y| \leq \frac{\pi}{2}$ allora $|y| \leq \frac{\pi}{2}|\sin y|$)

   $\left|\dfrac{xy^3}{x^2+\sin^2 y}\right| = \left|y^2\dfrac{xy}{x^2+\sin^2 y}\right| \leq \dfrac{\pi}{2}y^2\dfrac{|x||\sin y|}{x^2+\sin^2 y} \leq \dfrac{\pi}{4}y^2\dfrac{x^2+\sin^2 y}{x^2+\sin^2 y}$

   $= \dfrac{\pi}{4}y^2 \overset{(x,y)\to(0,0)}{\longrightarrow} 0$ quindi $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy^3}{x^2+\sin^2 y} = 0$

4. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (1+x^4y^4)^{\frac{1}{x^6+y^8}}$

   Notiamo che $(1+x^4y^4)^{\frac{1}{x^6+y^8}} = e^{\frac{\log(1+x^4y^4)}{x^6+y^8}}$ e che

   $\left|\dfrac{x^4y^4}{x^6+y^8}\right| = \left|x\dfrac{x^3y^4}{x^6+y^8}\right| \leq \dfrac{1}{2}x\dfrac{x^6+y^8}{x^6+y^8} = \dfrac{1}{2}x \overset{(x,y)\to(0,0)}{\longrightarrow} 0$

   quindi $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (1+x^4y^4)^{\frac{1}{x^6+y^8}} = e^0 = 1$

5. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)} \dfrac{x^3\log^2|y|}{x^4+(y-1)^6}$

   ponendo $z = y-1$ $\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)} \dfrac{x^3\log^2|y|}{x^4+(y-1)^6} = \lim\limits_{(x,z)\to(0,0)} \dfrac{x^3\log^2|1+z|}{x^4+z^6}$

   $\left|\dfrac{x^3\log^2(|1+z|)}{x^4+z^6}\right| \leq \left|4\dfrac{x^3z^2}{x^4+z^6}\right| \leq 4\dfrac{x^{4\frac{3}{4}}z^{6\frac{1}{3}}}{x^4+z^6} \leq 4\dfrac{(x^4+z^6)^{\frac{3}{4}}(x^4+z^6)^{\frac{1}{3}}}{x^4+z^6} \leq$

   $\leq 4(x^4+z^6)^{\frac{1}{12}} \overset{(x,z)\to(0,0)}{\longrightarrow} 0$

   quindi $\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)} \dfrac{x^3\log^2|y|}{x^4+(y-1)^6} = \lim\limits_{(x,z)\to(0,0)} \dfrac{x^3\log^2|1+z|}{x^4+z^6} = 0$

6. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{x^2+\sin^2 y}$

$\displaystyle\left|\frac{x^2+y^2}{x^2+\sin^2 y}-1\right| = \left|\frac{y^2-\sin^2 y}{x^2+y^2}\right| \leq \frac{y^4}{x^2+\sin^2 y} \leq \frac{\pi^2}{4}y^2\frac{\sin^2 y}{x^2+\sin^2 y} \leq$

$\displaystyle\leq \frac{\pi^2}{4}y^2 \overset{(x,y)\to(0,0)}{\longrightarrow} 0$

quindi $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{x^2+\sin^2 y} = 1$

Esercizio 2

1. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos 2x}{2} = \frac{\pi}{4} - \left[\frac{1}{4}\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}$

2. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x \sin x dx = -\left[\sin^3 x \cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + 3\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos^2 x dx$

$\displaystyle= 3\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x(1-\sin^2 x)dx = 3\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx - 3\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x dx =$

$\displaystyle= \frac{3}{4}\pi - 3\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x dx \Longrightarrow 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x dx = \frac{3}{4}\pi \Longrightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x dx = \frac{3}{16}\pi$

3. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(x^2+2)^2}dx = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{2}{(x^2+2)^2}dx = \frac{1}{2}\int_0^{\infty} \frac{2+x^2-x^2}{(x^2+2)^2}dx =$

$\displaystyle= \frac{1}{2}\int_0^{\infty} \frac{1}{x^2+2}dx - \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2+2)^2}dx$ Ma

$\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2+2)^2}dx = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} x\frac{d}{dx}(-\frac{1}{x^2+2})dx = \frac{1}{2}\left[-\frac{x}{x^2+2}\right]_0^{+\infty} +$

$\displaystyle+\frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2+2} = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2+2}$ quindi

$\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(x^2+2)^2}dx = \frac{1}{2}\int_0^{\infty} \frac{1}{x^2+2}dx - \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2+2)^2}dx =$

$\displaystyle= \frac{1}{4}\int_0^{\infty} \frac{1}{x^2+2}dx = \frac{1}{8}\int_0^{\infty} \frac{1}{(\frac{x}{\sqrt{2}})^2+1}dx = \frac{\sqrt{2}}{8}\int_0^{\infty} \frac{1}{y^2+1}dy =$

$\displaystyle= \frac{\sqrt{2}}{16}\pi$

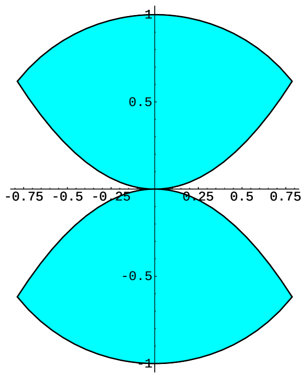
4. $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^3}{x^4-2x^3+2x^2-2x+1}dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^3}{(x^2+1)(x-1)^2}dx =$

$\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x-1} + \frac{1}{2}\frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{2}\frac{1}{x^2+1}dx = \Big[\log(|x-1|) - \frac{1}{2}\frac{1}{x-1} +$

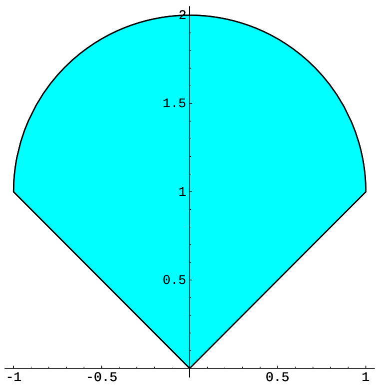
$\displaystyle+\frac{1}{2}\arctan x\Big]_0^{\frac{1}{2}} = \log\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \arctan\frac{1}{2}$

5. $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{\arctan x}{1+x^2}\cosh x dx = 0$ perchè è l'integrale di una funzione dispari su un intervallo simmetrico rispetto all'origine

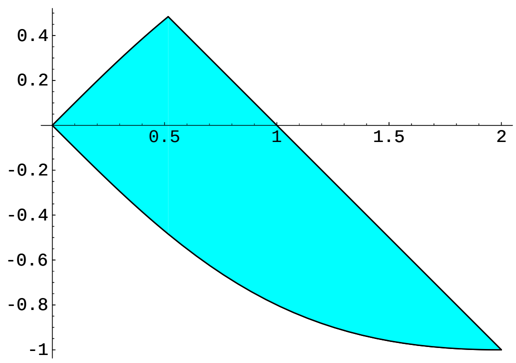
Esercizio 3 1. A è l'insieme che si ottiene intersecando il cerchio unitario con le parabole $y = x^2$ e $y = -x^2$



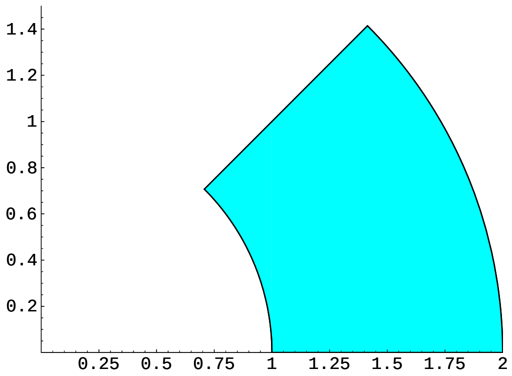
2. B è l'insieme che si ottiene intersecando il cerchio di centro $(0, 1)$ e raggio 1 con la regione del semipiano superiore compresa tra le rette $y = -x$ ed $y = x$



3. C è l'insieme che si ottiene intersecando la regione del semipiano $x > 0$ compresa tra i grafici delle funzioni $y = \arctan x$ e $y = -\arctan x$ con la regione di piano delimitata superiormente dalla retta $y = 1 - x$

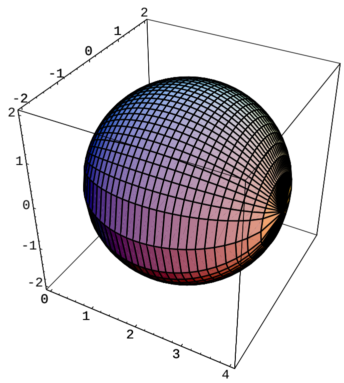


4. D il settore della corona centrata nell' origine di raggii 1 e 2 compresa tra l'asse delle x e la retta $y = x$

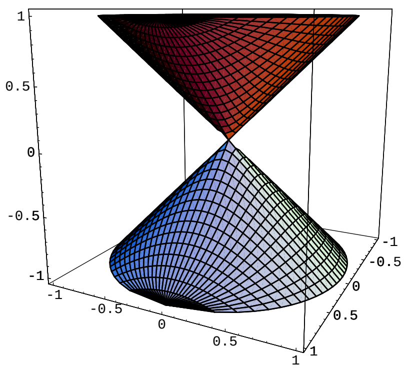


2

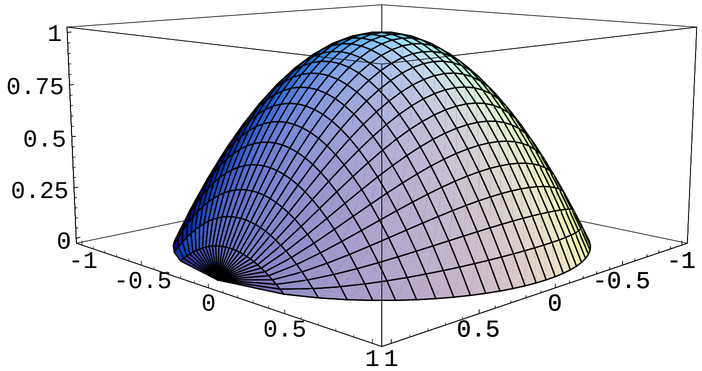
Esercizio 4 1. A è una sfera con centro nel punto $(2, 0, 0)$ e raggio 2



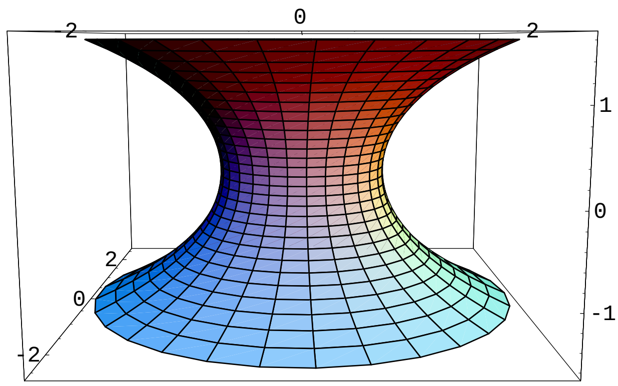
2. B è la parte interna del cono $z^2 = x^2 + y^2$ delimitata dai piani $z = 1$ e $z = -1$



3. C è la porzione del paraboloide $z = 1 - x^2 - y^2$ (che è un paraboloide di vertice $(0, 0, 1)$ con asse parallelo all'asse z e concavità verso il basso) contenuta nel semispazio $z > 0$



4. D è il solido di rotazione che si ottiene ruotando il sottografico della funzione $z = \cosh y$ nel piano $x = 0$ attorno all'asse z



5. E è l'insieme ottenuto tagliando l'ellissoide con semiassi di lunghezza 2,2 e 1 con il piano $y = z$