II Esonero di AM3 - 28/5/2008

Docente: Dott. Pierpaolo Esposito

1) Calcolare il seguente integrale
$$\int_\Sigma z\,d\sigma,$$
ove Σ è il grafico della funzione $z = xy$ sull'insieme $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\ ,\ 0 \leq y \leq \sqrt{3}x\}$.

2) Verificare direttamente la validitá del Teorema di Gauss-Green per la $1-$forma $\omega = \arctan y\,dx - xy\,dy$ sul triangolo T di vertici $(1,0)$, $(0,1)$ e $(0,-1)$.

3) Sia $\omega = f(x,y)\,dx + f(y,x)\,dy$ una $1-$forma differenziale, ove $f \in C^1(A)$ con $A = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Allora:
a) trovare la condizione su $f(x,y)$ che garantisce la chiusura di ω;
b) sotto tale condizione, con l'ausilio del Teorema di Gauss-Green mostrare che ω è anche esatta.

4) Sia $\alpha < 0$, $p > 0$ e $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 < z < 1,\ x^2 + y^2 < z^{2p}\}$. Allora:
a) in dipendenza da $\alpha < 0$, calcolare
$$\lim_{\epsilon \to 0^+} \int_{E \setminus Q_\epsilon} z^\alpha dxdydz,$$
ove $Q_\epsilon = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : |z| < \epsilon,\ x^2 + y^2 < \epsilon^{2p}\}$;
b) in vista di
$$B_{\min\{\epsilon^p,\epsilon\}}(0,0,0) \subset Q_\epsilon \subset B_{\sqrt{\epsilon^{2p}+\epsilon^2}}(0,0,0),$$
determinare per quali $\alpha < 0$ la funzione z^α è integrabile (in senso improprio) su E e calcolare tale integrale.