Appello X di AM3 - 8/9/2008

1) [7.5 punti] Trovare i punti della superficie

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ z^2 = xy + 1\}$$

che sono piú vicini all'origine. Giustificare accuratamente l'esistenza di tali punti di minima di distanza.

2) [7.5 punti] Dati $a, b > 0$, siano $\omega = (\frac{x^3}{3} - xy^2)dy$ una $1-$forma differenziale e $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\}$ un ellisse. Verificare la validitá del Teorema di Gauss-Green per la $1-$forma ω sul dominio A.

3) [7.5 punti] Calcolare l'integrale

$$\int_D \frac{y}{x} \, dx \, dy,$$

ove

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x \geq 0, \ y \geq 0, \ 1 \leq x + 2y \leq 3, \ x^2 - 4y^2 \geq 1\}.$$

4) [7.5 punti] Discutere l'invertibilitá locale in $(0, 0)$ della funzione

$$f(x, y) = (3y + xy, \ln(1 + x) + y^3),$$

determinando eventualmente un esempio esplicito di intorno di $f(0, 0)$ su cui la funzione inversa esiste.