Appello A di AM3 - 4/6/2007

1) Sia $F(x,y,z) = z \sin y + e^x \ln(1+z) + \sin y(\cos x - 1)$. Allora:
(a) rappresentare come grafico di un'opportuna funzione g l'insieme $\{F = 0\}$ localmente in $p_0 = (0,0,0)$, fornendo un esempio esplicito di intorno di p_0 per cui tale rappresentazione valga;
(b) trovare lo sviluppo di Taylor al secondo ordine della funzione g rispetto a zero.

2) Sia $f(x,y) = x^2 + y^2$ e $V = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^2 + x^2y^2 = 1\}$. Stabilire se la funzione $f(x,y)$ raggiunge il massimo e minimo assoluto in V. In caso affermativo, calcolarne i valori e i punti ove vengono raggiunti.

3) Calcolare

$$\int_E x^2 \, dx \, dy \, dz,$$

ove

$$E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, \ 3(x^2 + y^2) \leq z^2\}.$$

4) Siano $\omega = (x^3 - y)dx + (x+y)dy$ e $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ 0 \leq y \leq 1, \ 0 \leq x \leq 1 + \sqrt{2y - y^2}\}$.
Verificare la validitá del Teorema di Gauss-Green per la $1-$forma ω sul dominio A.
Sugg.: Nel calcolo degli integrali, usare la relazione $2y - y^2 = 1 - (y-1)^2$.

N.B. Coloro che intendono recuperare il primo/secondo esonero dovranno svolgere la prima/seconda coppia di esercizi nel tempo massimo di un'ora e mezza. Tutti gli altri avranno invece a disposizione tre ore per svolgere i 4 esercizi.