

AM2 Tutorato 4

A.A. 2007-2008

Docente: Prof. G. Mancini

Tutore: G. Mancini

Tutorato 4 del 19 Novembre 2007

Esercizio 1 Determinare i punti stazionari delle seguenti funzioni e tra questi determinare i punti di massimo e minimo locale

1. $f(x, y) = x^2y^2 + x^3 - x$
2. $f(x, y) = y^3 - y - x^2y^2 + x^2$
3. $f(x, y) = (x - 1)^2(x - y)$
4. $f(x, y) = (x^2 + y^2 - 1)(x^2 - y^2)$
5. $f(x, y) = x^4 - 2x^2 + (e^x - y)^4$
6. $f(x, y) = (y - x^2)(x^2 - y^2)^2$

Esercizio 2 Determinare l'estremo superiore e quello inferiore in \mathbb{R}^2 della funzione $f(x, y) = x^2y^2 + x^3 - x$

Esercizio 3 Sia $h \in C^2(\mathbb{R})$ e siano $a, b \in \mathbb{R}$ dimostrare che il determinante della matrice hessiana della funzione $f(x, y) = h(ax + by)$ è sempre nullo

Esercizio 4 Calcolare la derivata della funzione $f(x) = \int_{\cos^2 x}^{\sin^2 x} \log(1 + t^4) dt$

Esercizio 5 Determinare i punti di massimo e minimo locale della funzione $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - x^2y^2$

Esercizio 6 Dimostrare che la funzione $f(x, y) = \frac{x^3y}{x^2+y^4}$ con $f(0, 0) = 0$ è di classe C^1 su tutto \mathbb{R}^2 ma non è di classe C^2

Esercizio 7 Sia $f(t) = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} \cos(xt) dx$

1. Mostrare che f è una funzione continua su tutto \mathbb{R}
2. Mostrare che f è di classe C^1
3. Calcolare la derivata di f e mostrare che $f'(t) = -\frac{t}{2}f(t)$

Esercizio 8 Sia $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$ una funzione tale che $\langle \nabla f(x), x \rangle \geq \|x\| \forall x \in \mathbb{R}^n$ dimostrare che $\exists x_0 \in \mathbb{R}^n$ tale che $\nabla f(x_0) = 0$
(Suggerimento: Applicare il teorema fondamentale del calcolo a $\frac{d}{dt}f(tx)$)