**Università di Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica**

# AM2 Tutorato 3

**A.A. 2007-2008**
**Docente: Prof. G. Mancini**
**Tutore: G. Mancini**
**Tutorato 3 del 29 Ottobre 2007**

**Esercizio 1** Calcolare (se esistono) i limiti delle seguenti funzioni di più variabili

1. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin xy}{x^2+y^2}$
2. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{x^2+y^2}$
3. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\log\left(1+\sqrt{x^2+y^2}\right)}{\sqrt{x^2+y^2}}$
4. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy+\sqrt{x^2+y^2}\cos(x^2+y^5)}{\sqrt{x^2+y^2}}$
5. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2+xy+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}}$
6. $\lim_{\|(x,y)\|\to+\infty} \frac{\sin x^2 y}{x^2+y^2}$
7. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^3}{x^4+3y^4}$

**Esercizio 2** Studiare la continuità , l'esistenza delle derivate parziali e direzionali e la differenziabilità delle seguenti funzioni in $\mathbb{R}^2$

1. $f(x,y)=\begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{altrimenti}\end{cases}$
2. $f(x,y)=\begin{cases} \frac{x^2y^2}{x^2+y^4} & \text{se } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{altrimenti}\end{cases}$
3. $f(x,y)=\begin{cases} x^2y\sin\frac{1}{y} & \text{se } y\neq 0 \\ 0 & \text{altrimenti}\end{cases}$
4. $f(x,y)=\begin{cases} \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y)\neq(0,0) \\ 1 & \text{altrimenti}\end{cases}$

**Esercizio 3** Stabilire se le seguenti funzioni si possono estendere a funzioni di classe $C^1$ su tutto $\mathbb{R}^2$

1. $f(x,y)=\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$  2. $f(x,y)=\frac{x\log(1+y^4)}{x^6+y^2}$

**Esercizio 4** Discutere la continuità e la differenziabilità nell'origine delle seguenti funzioni al variare dei parametri $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$

1. $f(x,y)=|xy|^\alpha$  2. $f(x,y)=\frac{|x|^\alpha|y|^\beta}{(x^2+y^2)^\gamma}$ con $\alpha,\beta,\gamma>0$

**Esercizio 5** Sia $f\in C(\mathbb{R}^n)$ una funzione tale che $f(x)>0$ $\forall x\in\mathbb{R}^n$ e $\lim_{\|x\|\to\infty} f(x)=0$ dimostrare che $f$ ha un punto di massimo assoluto.

Mostrare che la funzione $f(x,y)=\frac{e^{\frac{1}{1+y^2}}}{1+x^2+y^2+\log(2+3x^4)}$ verifica le ipotesi richieste e calcolare esplicitamente il suo massimo.