Università di Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

AM2 Tutorato 2

A.A. 2007-2008
Docente: Prof. G. Mancini
Tutore: G. Mancini
Tutorato 2 del 15 Ottobre 2007

Esercizio 1 Studiare la convergenza puntuale, totale ed uniforme delle seguenti serie di funzioni.

1. $\sum_{n=1}^{\infty} e^{nx}$
2. $\sum_{n=1}^{\infty} n^{x}$
3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+x^2}$
4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^x}$
5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x\arctan(nx)}{n^2}$
6. $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{x}{n}$
7. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^x}{\log n}$
8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cosh nx}{e^{nx}}$
9. $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-nx^2}\sin nx$

Esercizio 2 Calcolare $\int_0^{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(nx)\cos(nx)}{n^2+1}dx$

Esercizio 3 Calcolare $\int_0^{\frac{1}{2}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+2}{n}x^n dx$

Esercizio 4 Stabilire se la funzione $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-nx}}{n+1}$ è integrabile in $(0,+\infty)$.
Mostrare inoltre che f è derivabile e calcolarne la derivata.

Esercizio 5 Stabilire se la funzione $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{e^{-nx}}{n^2}$ è integrabile in $(0,+\infty)$

Esercizio 6 Calcolare tutte le determinazioni dei seguenti numeri complessi

1. $\log(-5)$
2. $\log(1+i^5)$
3. $(\sqrt{3}+i)^{\frac{1+i}{1-i}}$
4. $\log\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(i\pi)^n}{n!}\right)$

Esercizio 7 Determinare il limite puntuale $f(x)$ della successione $f_n(x)=\dfrac{1+nx+n^3x^2}{n^3x^2+1}$ e mostrare che $\sup_{x\in\mathbb{R}}|f_n(x)-f(x)| \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$

Esercizio 8 Siano f e g due funzioni analitiche in un intervallo (a,b). Dimostrare che se $f(x)g(x)=0\ \forall x\in(a,b)$ allora o $f(x)=0\ \forall x\in(a,b)$ oppure $g(x)=0\ \forall x\in(a,b)$. Mostrare con un esempio che questo può non essere vero se f e g sono solo continue