

AM2 Tutorato 1

A.A. 2007-2008

Docente: Prof. G. Mancini

Tutore: G. Mancini

Tutorato 1 del 1 Ottobre 2007

Esercizio 1 Determinare il raggio di convergenza delle seguenti serie di potenze e studiare il comportamento di ciascuna serie agli estremi dell'intervallo di convergenza

$$\begin{array}{lll} 1. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^4} & 4. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 3^n}{n^3} x^n & 7. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1 + \sin^2 n^3} \\ 2. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n} & 5. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\cos n \frac{\pi}{2}\right)^n x^n & 8. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} x^n \\ 3. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^2} (x-2)^n & 6. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sin n}{n}\right)^n x^n & 9. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{x^{4n}} \end{array}$$

Esercizio 2 Studiare la convergenza puntuale ed uniforme delle seguenti successioni di funzioni

$$\begin{array}{l} 1. f_n(x) = e^{-nx^2} \\ 2. f_n(x) = \frac{1}{n} \chi_{[0,n]} \\ 3. f_n(x) = n \chi_{(0, \frac{1}{n}]} \\ 4. f_n(x) = \frac{x^n}{n} \\ 5. f_n(x) = \frac{1}{1 + nx^2} \\ 6. f_n(x) = \frac{\arctan nx}{1 + n^2 x^2} \\ 7. f_n(x) = \int_0^{nx} e^{-t^2} dt \end{array}$$

Esercizio 3 Sia $f_n(x) = \frac{x}{1 + nx^2}$ $x \in \mathbb{R}$

1. Stabilire se $f_n(x)$ e $f'_n(x)$ convergono uniformemente.
2. Stabilire se $\lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x) = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)\right)'$

Esercizio 4 Calcolare $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^{\infty} \frac{\sin nx}{x^2 + n} dx$

Esercizio 5 Calcolare $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} \frac{n \sin^2 x}{x + n} dx$

Esercizio 6 Sviluppare in serie di potenze le seguenti funzioni

1. $f(x) = \frac{\sin x^2}{x^2}$

2. $f(x) = \frac{1}{x-2}$

3. $f(x) = \cosh x$

4. $f(x) = \frac{e^{x^3} - 1}{x^2}$

Esercizio 7 Sia f_n una successione di funzioni uniformemente continue in un insieme E . Dimostrare che se f_n converge uniformemente su E ad una funzione f allora f è uniformemente continua in E .