Università di Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

AM2 Soluzioni Tutorato 2

A.A. 2007-2008
Docente: Prof. G. Mancini
Tutore: G. Mancini
Tutorato 2 del 15 Ottobre 2007

Esercizio 1

1. $\sum_{n=1}^{\infty} e^{nx}$ La serie è una serie geometrica di ragione e^x e dunque converge $\iff e^x < 1 \iff x < 0$. La convergenza non è totale in $(-\infty, 0)$ perchè
$$\sup_{x\in(-\infty,0)} e^{nx} = 1 \quad \text{e} \quad \sum_{n=1}^{\infty} 1 = +\infty$$
ma è totale (e quindi anche uniforme) in $(-\infty, -\delta]$ $\forall\, \delta > 0$ infatti
$$\sup_{x\in(-\infty,-\delta]} e^{nx} = e^{-n\delta} \quad \text{e} \quad \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n\delta} \text{ converge}$$
La convergenza non è uniforme in tutto $(-\infty, 0)$ perchè per $x = 0$ si ha $\sum_{n=1}^{\infty} 1 = +\infty$

2. $\sum_{n=1}^{\infty} n^x$ La serie è una serie armonica generalizzata e dunque converge $\iff x < -1$. La convergenza non è totale in $(-\infty, -1)$ perchè
$$\sup_{x\in(-\infty,-1)} n^x = \frac{1}{n} \quad \text{e} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$$
ma è totale (e quindi anche uniforme) in $(-\infty, -1-\delta]$ $\forall\, \delta > 0$ infatti
$$\sup_{x\in(-\infty,-1-\delta]} n^x = \frac{1}{n^{1+\delta}} \quad \text{e} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\delta}} \text{ converge}$$
La convergenza non è uniforme in tutto $(-\infty, -1)$ perchè per $x = -1$ si ha $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + x^2}$
La serie converge su tutto $\mathbb{R}$ perchè ha lo stesso comportamento di $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ Inoltre la convergenza è totale ed uniforme su tutto $\mathbb{R}$ in quanto
$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \frac{1}{n^2 + x^2} = \frac{1}{n^2} \qquad \text{e} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty$$

4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^x}$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{x^n}{n^x}\right|} = |x|$ dunque per il criterio della radice n-esima la serie converge se $|x| < 1$ e non converge se $|x| > 1$. Inoltre per $x = 1$ si ha $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$ e per $x = -1$ si ha $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n$ che non converge. Poichè la serie non converge in 1 e -1 la convergenza non può essere uniforme e quimdi neanche totale in $(-1, 1)$. Vediamo ora se la convergenza è totale in $(-\delta, \delta)\ \forall\ 0 < \delta < 1$

Sia $g(x) = \frac{x^n}{n^x}$ $g'(x) = \frac{nx^{n-1}n^x - x^n n^x \log n}{n^{2x}} = x^{n-1}\frac{n - x\log n}{n^x}$

$g'(x) = 0 \iff x = 0 \vee x = \frac{n}{\log n} > 1$. Studiando il grafico di g si ricava che

$$\sup_{x\in(-1,1)} \left|\frac{x^n}{n^x}\right| = \frac{\delta^n}{n^{-\delta}}$$

Dunque poichè $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\delta^n}{n^{-\delta}}$ converge la convergenza è totale e uniforme in $(-\delta, \delta)\ \forall\ 0 < \delta < 1$

5. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x\arctan(nx)}{n^2}$

La serie è nulla per $x = 0$ e per $x \neq 0$ ha lo stesso comportamento di $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ dunque converge $\forall x \in \mathbb{R}$. La convergenza non è uniforme su tutto $\mathbb{R}$ perchè $\displaystyle\sup_{x\in\mathbb{R}} \left|\frac{x\arctan(nx)}{n^2}\right| = +\infty$ (e quindi $\frac{x\arctan(nx)}{n^2}$ non converge uniformemente a 0). La convergenza è però totale ed uniforme su tutti gli insiemi limitati perchè $\forall M > 0$ si ha $\displaystyle\sup_{x\in[-M,M]} \left|\frac{x\arctan(nx)}{n^2}\right| = \frac{M\arctan(nM)}{n^2}$ e $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{M\arctan(nM)}{n^2}$ converge

6. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{x}{n}$

Per $x \neq 0$ la serie ha lo stesso comportamento di $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ dunque c'è convergenza solo per $x = 0$

7. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^x}{\log n}$

Per $x < -1$ la serie converge perchè $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^x}{\log n} \le \sum_{n=1}^{\infty} n^x < +\infty$

Per $x > -1$ si ha invece che $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n\frac{n^x}{\log n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{x+1}}{\log n} = \infty$

$\displaystyle\Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^x}{\log n} \ge \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$ quindi la serie diverge. Infine per $x = 1$ si ha la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\log n}$ che per il criterio di condensazione di Cauchy ha lo stesso comportamento di $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \frac{1}{2^n \log 2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \log 2}$ e quindi diverge. Poichè la serie diverge per $x = -1$ la convergenza non può essere ne totale ne uniforme in $(-\infty, -1)$. La convergenza è però totale e uniforme in $(-\infty, -1-\delta)\ \forall\, \delta > 0$ perchè

$$\sup_{(-\infty,-1-\delta)} \frac{n^x}{\log n} = \frac{1}{n^{1+\delta} \log n} \quad \text{e} \quad \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^{1+\delta} \log n} \leq \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^{1+\delta}} < +\infty$$

8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cosh nx}{e^{nx}}$

Notiamo che $\lim_{n\to\infty} \frac{\cosh nx}{e^{nx}} = \lim_{n\to\infty} \frac{e^{nx} + e^{-nx}}{2e^{nx}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1 + e^{-2nx}}{2} =$ $= \begin{cases} \frac{1}{2} \text{ se } x > 0 \\ 1 \text{ se } x = 0 \\ +\infty \text{ se } x < 0 \end{cases}$ quindi la serie non converge per nessun valore di x.

9. $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-nx^2} \sin nx$

La serie converge se $x = 0$ e se $x \neq 0$ si ha che $|e^{-nx^2} \sin nx| \leq e^{-nx^2}$ e $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{e^{-nx^2}} = e^{-x^2} < 1$ dunque la serie coverge su tutto $\mathbb{R}$. La convergenza non è totale in tutto $\mathbb{R}$ perchè

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |e^{-nx^2} \sin nx| \geq e^{-\frac{1}{n}} \sin 1 \quad \text{e} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-\frac{1}{n}} \sin 1 = +\infty$$

ma è totale e quindi anche uniforme in $(-\infty, -\delta] \cup [\delta, +\infty)\ \forall\ \delta > 0$ perchè

$$\sup_{x\in(-\infty,-\delta]\cup[\delta,+\infty)} |e^{-nx^2} \sin nx| \leq \sup_{x\in(-\infty,-\delta]\cup[\delta,+\infty)} e^{-nx^2} = e^{-n\delta^2} \quad \text{e}$$

$\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-n\delta^2}$ converge. Infine non c'è convergenza uniforme su tutto $\mathbb{R}$ perchè se ci fosse la successione $f_n(x) = e^{-nx^2} \sin{(nx)}$ dovrebbe convergere uniformemente a 0 (per il criterio di Cauchy) ma

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \left| e^{-nx^2} \sin{(nx)} \right| \geq |f_n(\frac{1}{n})| = e^{-\frac{1}{n}} \sin(1) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \sin(1) > 0$$

Esercizio 2 Poichè $\sup_{x\in[0,\pi]} \left| \frac{\sin(nx)\cos(nx)}{n^2+1} \right| \leq \frac{1}{n^2+1}$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+1}$ converge, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)\cos(nx)}{n^2+1}$ converge totalmente in $[0, \pi]$ e dunque applicando il teorema di integrazione per serie

$$\int_0^\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)\cos(nx)}{n^2+1} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^\pi \frac{\sin(nx)\cos(nx)}{n^2+1} dx =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2(n^2+1)} \int_0^\pi \sin(2nx) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2(n^2+1)} \left[-\frac{\cos 2nx}{n} \right]_0^\pi = \sum_{n=1}^{\infty} 0 = 0$$

Esercizio 3 Osserviamo che la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+2}{n} x^n$ converge totalmente (e quindi anche uniformemente) in $[0, \frac{1}{2}]$ perchè è una serie di potenze con raggio di convergenza 1. Si può dunque applicare il teorema di integrazione per serie:

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{n} x^n dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{n+2}{n} x^n dx = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{n+2}{n(n+1)} x^{n+1} \right]_0^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{2^{n+1}n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+2-n}{2^{n+1}n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n n} - \frac{1}{2^{n+1}(n+1)} = \frac{1}{2}$$

Esercizio 4 $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-nx}}{n+1}$

La serie converge totalmente in $[\delta, +\infty)$ $\forall\ \delta > 0$ infatti

$\sup_{x \in [\delta, +\infty)} \frac{e^{-nx}}{n+1} = \frac{e^{-n\delta}}{n+1}$ e $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-n\delta}}{n+1}$ converge. In particolare la serie converge uniformemente in tutti i compatti contenuti in $[0, +\infty)$ e quindi poichè è una serie a termini positivi si può applicare il teorema di integrazione per serie negli integrali impropri

$$\int_0^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-nx}}{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{e^{-nx}}{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1 < +\infty$$

Quindi f è integrabile in $(0, +\infty)$.

Inoltre la serie delle derivate $\sum_{n=1}^{\infty} -\frac{ne^{-nx}}{n+1}$ converge uniformemente in tutti i compatti contenuti in $(0, +\infty)$ dunque per il teorema di derivazione per serie si ha che f è derivabile (in tutti i compatti contenuti in $(0, +\infty)$ e quindi anche in $(0, +\infty)$) e che $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{ne^{-nx}}{n+1}$

Esercizio 5 $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{e^{-nx}}{n^2}$

La serie $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{e^{-nx}}{n^2} dx$ converge totalmente in $[\delta, +\infty)$ $\forall\ \delta > 0$ infatti

$\sup_{x \in [\delta, +\infty)} \left| (-1)^n \frac{e^{-nx}}{n^2} \right| = \frac{e^{-n\delta}}{n^2}$ e $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-n\delta}}{n^2}$ converge. In particolare la serie converge uniformemente in tutti i compatti contenuti in $[0, +\infty)$. Siccome la serie non è a termeini positivi non si può applicare direttamente il teorema di integrazione per serie. Consideriamo allora la successione delle somme parziali $S_N(x) = \sum_{n=1}^{N} (-1)^n \frac{e^{-nx}}{n^2}$. Sappiamo già che $S_N(x)$ converge uniformemente nei compatti ed inoltre

$$|S_N(x)| = \left| \sum_{n=1}^{N} (-1)^n \frac{e^{-nx}}{n^2} \right| \le \sum_{n=1}^{N} \frac{e^{-nx}}{n^2} \le \sum_{n=1}^{N} \frac{e^{-x}}{n^2} = e^{-x} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} e^{-x}$$

che è integrabile in $(0, +\infty)$ quindi c'è equidominatezza. Dunque per il teorema di passaggio al limite sotto segno di integrale si ha

$$\int_0^{+\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{e^{-nx}}{n^2} dx = \int_0^{+\infty} \lim_{N \to \infty} S_N(x) dx = \lim_{N \to \infty} \int_0^{+\infty} S_N(x) dx =$$

$$= \lim_{N \to \infty} \int_0^{+\infty} \sum_{n=1}^{N} (-1)^n \frac{e^{-nx}}{n^2} dx = \lim_{N \to \infty} \sum_{n=1}^{N} \int_0^{+\infty} (-1)^n \frac{e^{-nx}}{n^2} dx =$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{+\infty}(-1)^n\frac{e^{-nx}}{n^2}dx=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^3} \text{ che converge}$$

Esercizio 6

1. $\log(-5)=\log(5e^{i\pi})=\log 5+i\pi+2k\pi i \quad k\in\mathbb{Z}$
2. $\log(1+i^5)=\log(1+i)=\log(\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}})=\log\sqrt{2}+i\frac{\pi}{4}+2k\pi i \quad k\in\mathbb{Z}$
3. $(\sqrt{3}+i)^{\frac{1+i}{1-i}}=(\sqrt{3}+i)^i=\exp(i\log(\sqrt{3}+i))=\exp(i\log 2-\frac{\pi}{6}-2k\pi)=$ $=e^{-\frac{\pi}{6}+2k\pi}(\cos(\log 2)+i\sin(\log 2)) \quad k\in\mathbb{Z}$
4. $\log\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(i\pi)^n}{n!}\right)=\log(\exp i\pi-1)=\log(-2)=\log 2+i\pi+2k\pi i \quad k\in\mathbb{Z}$

Esercizio 7

$$\lim_{n\to\infty}f_n(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{1+nx+n^3x^2}{n^3x^2+1}=1\ \forall x\in R.$$

$$|f_n(x)-f(x)|=\left|\frac{1+nx+n^3x^2}{n^3x^2+1}-1\right|=\left|\frac{nx}{n^3x^2+1}\right|$$

Studiamo la funzione $g(x)=\dfrac{nx}{n^3x^2+1}$

$g'(x)=\dfrac{n(1-n^3x^2)}{(n^3x^2+1)^2}$

$g'(x)=0\iff x=\pm\dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$

Studiando il segno della derivata prima si ricava che $x=+\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ è n punto di massimo per $g(x)$ mentre $x=-\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ è un punto di minimo. Pertanto poichè g è dispari e $\lim_{x\to+\infty}g(x)=\lim_{x\to-\infty}g(x)=0$ si ha che

$$\sup_{x\in R}|g(x)|=g(\pm\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}})=\frac{n\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}}{n^3\frac{1}{n^3}+1}=\frac{1}{2\sqrt{n}}$$

da cui si ricava che

$$\sup_{x\in R}|f_n(x)-f(x)|=\frac{1}{2\sqrt{n}}\overset{n\to\infty}{\longrightarrow}0$$

Esercizio 8 Basta osservare che se $\exists x_0\in(a,b)$ tale che $f(x_0)\neq 0$ allora, poichè f è continua, per il teorema della permanenza del segno $\exists\varepsilon>0$ t.c. $\forall x\in(x_0-\varepsilon,x_0+\varepsilon)$ $f(x)\neq 0$. Ma allora siccome $f(x)g(x)=0$ si ha che $g(x)=0\forall x\in(x_0-\varepsilon,x_0+\varepsilon)$. Dunque g è nulla in un intervallo (che è un insieme con dei punti di accumulazione) e quindi per il principio di identità delle funzioni analitiche $g(x)=0\ \forall x\in(a,b)$. Dunque o $f(x)=0\ \forall x\in(a,b)$ oppure se $\exists x_0\in(a,b)$ tale che $f(x_0)\neq 0$ allora $g(x)=0\ \forall x\in(a,b)$. Questo non è vero se f e g sono solo continue infatti ad esempio
$f(x)=\begin{cases}0 \text{ se } x\geq 0\\ x \text{ se } x<0\end{cases}$ e $g(x)=\begin{cases}x \text{ se } x\geq 0\\ 0 \text{ se } x<0\end{cases}$ sono due funzioni continue tali che $f(x)g(x)=0\ \forall x\in\mathbb{R}$ ma nessuna delle due è identicamente nulla.