Università di Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

AM2 Soluzioni Tutorato 1

A.A. 2007-2008
Docente: Prof. G. Mancini
Tutore: G. Mancini
Tutorato 1 del 1 Ottobre 2007

Esercizio 1

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^4}$

   $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^4}} = 1 \Longrightarrow r = 1.$ Inoltre per $x = 1$ si ha $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} < +\infty$ e per $x = -1$ si ha $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^4}$ che converge. Dunque la serie converge in $[-1, 1]$

2. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n}$

   $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|(-1)^n \frac{1}{n}\right|} = 1 \Longrightarrow r = 1.$ Inoltre per $x = 1$ si ha $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ che converge e per $x = -1$ si ha $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ che diverge. Dunque la serie converge in $(-1, 1]$

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^2}(x-2)^n$

   $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{3^n}{n^2}} = 3 \Longrightarrow r = \frac{1}{3}.$ $-\frac{1}{3} < x - 2 < \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{5}{3} < x < \frac{7}{3}$ Per $x = \frac{7}{3}$ si ha $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ che converge e per $x = \frac{5}{3}$ si ha $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ che converge. Dunque la serie converge in $\left[\frac{5}{3}, \frac{7}{3}\right]$

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 3^n}{n^3} x^n$

   $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{2^n + 3^n}{n^3}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{3^n \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n + 1}{n^3}} = 3 \Longrightarrow r = \frac{1}{3}.$ Per $x = \frac{1}{3}$ si ha $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 3^n}{3^n n^3}$ che ha lo stesso comportamento di $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ e quindi converge e per $x = -\frac{1}{3}$ si ha $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n + 3^n}{3^n n^3}$ che converge assolutamente.

Dunque la serie converge in $\left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right]$

5. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\cos n\frac{\pi}{2}\right)^n x^n$

   $\displaystyle\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\cos n\frac{\pi}{2}\right|^n} = \limsup_{n\to\infty} \left|\cos n\frac{\pi}{2}\right| = 1 \Longrightarrow r = 1.$

   Per $x = 1$ si ha $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\cos n\frac{\pi}{2}\right)^n$ che non converge e per $x = -1$ si ha $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\cos n\frac{\pi}{2}\right)^n$ che non converge. Dunque la serie converge in $(-1, 1)$

6. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sin n}{n}\right)^n x^n$

   $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{\sin n}{n}\right|^n} = 0 \Longrightarrow r = +\infty.$ La serie converge su tutto $\mathbb{R}$

7. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1+\sin^2 n^3}$

   $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{1+\sin^2 n^3}} = 1 \Longrightarrow r = 1.$ Per $x = 1$ si ha $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+\sin^2 n^3}$ che non converge e per $x = -1$ si ha $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{1+\sin^2 n^3}$ che non converge. Dunque la serie converge in $(-1, 1)$

8. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} x^n$

   $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \frac{n^n}{n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(n+1)^n} n^n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{e} \Rightarrow r = e.$

   Per $x = e$ si ha $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} e^n$ che per la formula di Stirling ha lo stesso comportamento di $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{2\pi n}$ e quindi diverge e per $x = -e$ si ha $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n!}{n^n} e^n$ che non converge per lo stesso motivo. Dunque la serie converge in $(-e, e)$

9. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{x^{4n}}$

   $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^n} = 2 \Longrightarrow r = \frac{1}{2}.$

   $\displaystyle\left|\frac{1}{x^4}\right| < \frac{1}{2} \Leftrightarrow x^4 > 2 \Leftrightarrow x > \sqrt[4]{2} \vee x < -\sqrt[4]{2}$

   Per $x = \pm\sqrt[4]{2}$ si ha $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 1$ che diverge Dunque la serie converge in $(-\infty, \sqrt[4]{2}) \cup (\sqrt[4]{2}, +\infty)$

Esercizio 2

1. $f_n(x) = e^{-nx^2} \quad f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 1 \text{ se } x = 0 \\ 0 \text{ se } x \neq 0 \end{cases}$
La convegenza non è uniforme su tutto $\mathbb{R}$ perchè la funzone $f(x)$ non è continua. La convergenza è uniforme in $(-\infty, -\delta] \cup [\delta, +\infty) \forall\ \delta > 0$ infatti:
$$\sup_{x\in(-\infty,-\delta]\cup[\delta,+\infty)} |f_n(n) - f(x)| = e^{-n\delta^2} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

2. $f_n(x) = \frac{1}{n}\chi_{[0,n]} \quad f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0\ \forall x \in \mathbb{R}$
La convergnza è uniforme perchè:
$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| = \frac{1}{n} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

3. $f_n(x) = n\chi_{(0,\frac{1}{n}]} \quad f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0\ \forall x \in \mathbb{R}$ La convergenza non è uniforme in $\mathbb{R}$ perchè
$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| = n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$$
Tuttavia la convergenza è uniforme in $(-\infty, 0] \cup [\delta, +\infty)\ \forall\ \delta > 0$ perhè definitivamente si ha
$$\sup_{x\in(-\infty,0]\cup[\delta,+\infty)} |f_n(x) - f(x)| = 0$$

4. $f_n(x) = \frac{x^n}{n} \quad f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0\ \forall x \in [-1, 1]$. La convergnza è uniforme perchè:
$$\sup_{x\in[-1,1]} |f_n(x) - f(x)| = \frac{1}{n} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

5. $f_n(x) = \frac{1}{1 + nx^2}$
f_n converge in $\mathbb{R}$ alla funzione $f(x) = \begin{cases} 0 \text{ se } x \neq 0 \\ 1 \text{ se } x = 0 \end{cases}$ La convergenza non è uniforme in $\mathbb{R}$ perchè f non è continua. La convergenza è però uniforme in $(-\infty, -\delta] \cup [\delta, +\infty)\ \forall \delta > 0$ perchè
$$\sup_{x\in(-\infty,-\delta]\cup[\delta,+\infty)} |f_n(x) - f(x)| = \frac{1}{1 + n\delta^2} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

6. $f_n(x) = \frac{\arctan nx}{1 + n^2x^2}$
f_n converge in $\mathbb{R}$ alla funzione $f(x) = 0$. La convergenza non è uniforme perchè
$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x)| \geq f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{\pi}{8}$$
La convergenza è uniforme in $(-\infty, -\delta] \cup [\delta, +\infty)\ \forall \delta > 0$ perchè
$$\sup_{x\in(-\infty,-\delta]\cup[\delta,+\infty)} |f_n(x)| = \sup_{x\in(-\infty,-\delta]\cup[\delta,+\infty)} \left|\frac{\arctan nx}{1 + n^2x^2}\right| \leq \frac{\frac{\pi}{2}}{1 + n^2\delta^2} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

7. $f_n(x) = \int_0^{nx} e^{-t^2} dt$

f_n converge in $\mathbb{R}$ alla funzione $f(x) = \begin{cases} \sqrt{\pi} \text{ se } x > 0 \\ 0 \text{ se } x = 0 \\ -\sqrt{\pi} \text{ se } x < 0 \end{cases}$

La convergenza non è uniforme perchè f_n è una successione di funzioni continue mentre f non è continua. La convergenza è uniforme in $[\delta, +\infty)$ $\forall \delta > 0$ perchè

$$\sup_{x\in[\delta,+\infty)} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in[\delta,+\infty)} |\int_0^{nx} e^{-t^2} dt - \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt| =$$

$$= \sup_{x\in[\delta,+\infty)} \int_{nx}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \int_{n\delta}^{+\infty} e^{-t^2} dt \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

la convergenza è uniforme anche in $(-\infty, -\delta]$ $\forall \delta > 0$ perchè

$$\sup_{x\in(-\infty,-\delta]} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in(-\infty,-\delta]} |\int_0^{nx} e^{-t^2} dt - \int_{-\infty}^{0} e^{-t^2} dt| =$$

$$= \sup_{x\in(-\infty,-\delta]} \int_{-\infty}^{nx} e^{-t^2} dt = \int_{-\infty}^{-n\delta} e^{-t^2} dt \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Esercizio 3 $f_n(x) = \dfrac{x}{1 + nx^2}$

1. $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$

   $f'_n(x) = \dfrac{(1 + nx^2) - 2nx^2}{(1 + nx^2)^2} = \dfrac{1 - nx^2}{(1 + nx^2)^2}$

   $f'_n(x) = 0 \iff x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ Studiando il segno di f'_n si ricava che $x = \frac{1}{\sqrt{n}}$ è un punto di massimo per f_n mentre $x = -\frac{1}{\sqrt{n}}$ è un punto di minimo. Pertanto poichè f_n è dispari e $f_n(0) = \lim_{x\to\infty} |f_n(x)| = 0$ si ha che

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| = \lim_{x\to+\infty} f_n(x) = f_n(\frac{1}{\sqrt{n}}) = \frac{1}{2\sqrt{n}} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

   dunque f_n converge uniformemente.
   Vediamo ora se f'_n converge uniformemente.

   $\lim_{n\to\infty} f'_n(x) = \begin{cases} 0 \text{ se } x \neq 0 \\ 1 \text{ se } x = 0 \end{cases}$ Dunque f'_n non converge uniformemente perchè è una successione di funzioni continue e il suo limite non è una funzione continua

2. $\lim_{n\to\infty} f'_n(x) = \begin{cases} 0 \text{ se } x \neq 0 \\ 1 \text{ se } x = 0 \end{cases}$ mentre $\left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right)' = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

   quindi $\lim_{n\to\infty} f'_n(x) \neq \left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right)'$

Esercizio 4 $f_n(x) = \dfrac{\sin nx}{x^2 + n}$

$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$ e la convergenza è uniforme su tutto $\mathbb{R}$ perchè

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in\mathbb{R}} \left|\frac{\sin nx}{x^2 + n}\right| \leq \sup_{x\in\mathbb{R}} \frac{1}{x^2 + n} = \frac{1}{n} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Inoltre $|f_n(x)| \leq \dfrac{1}{x^2+n} \leq \dfrac{1}{x^2}$ quindi c'è equidominatezza e quindi si può applicare il teorema di passaggio al limite sotto segno di integrale improprio

$$\lim_{n\to\infty} \int_1^\infty \frac{\sin nx}{x^2+n} dx = \int_1^\infty \lim_{n\to\infty} \frac{\sin nx}{x^2+n} dx = \int_1^\infty 0 = 0$$

Esercizio 5 $f_n(x) = \dfrac{n \sin^2 x}{x+n}$

$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = sin^2 x \; \forall x \in [0, 2\pi]$ e la convergenza è uniforme perchè

$$\sup_{x\in[0,2\pi]} |\frac{n\sin^2 x}{x+n} - sin^2 x| = \sup_{x\in[0,2\pi]} |sin^2 x \left(\frac{n}{x+n} - 1\right)| \leq \sup_{x\in[0,2\pi]} |\left(\frac{n}{x+n} - 1\right)|$$

$$= \sup_{x\in[0,2\pi]} |\left(\frac{x}{x+n}\right)| = \sup_{x\in[0,2\pi]} |\left(1 - \frac{n}{x+n}\right) == 1 - \frac{n}{2\pi+n} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Dunque per il teorema di passaggio al limite sotto segno di integrale si ha che:

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{2\pi} \frac{n\sin^2 x}{x+n} dx = \int_0^{2\pi} \lim_{n\to\infty} \frac{n\sin^2 x}{x+n} = \int_0^{2\pi} sin^2 x = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} 1 - \cos 2x = \pi$$

Esercizio 6

1. $f(x) = \dfrac{\sin x^2}{x}$

   $$\frac{\sin x^2}{x^2} = \frac{1}{x^2} \sin x^2 = \frac{1}{x^2} \sum_{n=0}^\infty (-1)^n \frac{(x^2)^{2n+1}}{(2n+1)!} = \frac{1}{x^2} \sum_{n=0}^\infty (-1)^n \frac{x^{4n+2}}{(2n+1)!}$$

   $$= \sum_{n=0}^\infty (-1)^n \frac{x^{4n}}{(2n+1)!}$$

2. $f(x) = \dfrac{1}{x-2}$

   $$\frac{1}{x-2} = -\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{x}{2}} = -\frac{1}{2} \sum_{n=0}^\infty \left(\frac{x}{2}\right)^n = -\sum_{n=0}^\infty \frac{x^n}{2^{n+1}}$$

3. $f(x) = \cosh x$

   $$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{1}{2} \left(\sum_{n=0}^\infty \frac{x^n}{n!} + \sum_{n=0}^\infty (-1)^n \frac{x^n}{n!} \right) =$$

   $$= \frac{1}{2} \left(\sum_{n=0}^\infty \frac{x^n}{n!} + (-1)^n \frac{x^n}{n!} \right) = \sum_{n=0}^\infty \frac{x^{2n}}{2n!}$$

4. $f(x) = \dfrac{e^{x^3} - 1}{x^2}$

   $$\frac{e^{x^3} - 1}{x^2} = \frac{\sum_{n=0}^\infty \frac{x^{3n}}{n!} - 1}{x^2} = \frac{\sum_{n=1}^\infty \frac{x^{3n}}{n!}}{x^2} = \frac{\sum_{n=0}^\infty \frac{x^{3n+3}}{(n+1)!}}{x^2} = \sum_{n=0}^\infty \frac{x^{3n+1}}{(n+1)!}$$

Esercizio 7 Poichè f_n converge uniformemente in E si ha che $\forall\, \epsilon > 0 \; \exists\, n_\epsilon \in \mathbb{N}$ t.c $\forall\, n \geq n_\epsilon$ si ha $|f_n(x) - f(x)| \leq \epsilon \; \forall\, x \in E$. Per ipotesi inotre f_{n_ϵ} è uniformemente continua in E cioè $\forall\, \epsilon > 0 \; \exists \delta > 0$ t.c $\forall\, x, y \in E$ se $|x - y| < \delta$ allora $|f_{n_\epsilon}(x) - f_{n_\epsilon}(y)| < \delta$. Si ha allora che $\forall\, x, y \in E$ se $|x - y| < \delta$

$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f_{n_\epsilon}(x)| + |f_{n_\epsilon}(x) - f_{n_\epsilon}(y)| + |f_{n_\epsilon}(x) - f(y)| < 3\epsilon$ e dunque f è uniformemente continua in E.