Università di Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

AM2 Soluzioni Tutorato 5

A.A. 2007-2008
Docente: Prof. G. Mancini
Tutore: G. Mancini
Tutorato 5 del 3 Dicembre 2007

Esercizio 1 $f(x,y) = x^2 + y$ Vogliamo cercare il massimo e il minimo della funzione nell'insieme $A = \{(\cos t, \sin t) | t \in [0, 2\pi]\}$. Per far questo basta studiare la funzione $g(t) = f(\cos t, \sin t) = \cos^2 t + \sin t$ nell' intervallo $[0, 2\pi]$
$g'(t) = -2\sin t \cos t + \cos t = \cos t(1 - 2\sin(t))$. Notiamo che $g'(t) = 0 \Leftrightarrow \cos t = 0 \vee \sin t = \frac{1}{2} \Leftrightarrow t = \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi, \frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi$. Il massimo e il minimo di g si potrebbero avere anche per $t = 0, 2\pi$.
Notiamo che $g(0) = 1 = g(2\pi)$, $g(\frac{\pi}{2}) = 1$, $g(\frac{3}{2}\pi) = -1$, $g(\frac{\pi}{6}) = \frac{5}{4} = g(\frac{5}{6}\pi)$ quindi il massimo di f è $\frac{5}{4}$ mentre il minimo è -1.
Si poteva anche usare il principio dei moltiplicatori di Lagrange risolvendo il sistema $\begin{cases} 2x = 2\lambda x \\ 1 = 2\lambda y \\ x^2 + 1y^2 = 1 \end{cases}$
Dalla prima equazione si ricava che $x = 0$ o che $\lambda = 1$. Se $x = 0$ sostituendo nell' equazione del vincolo ricaviamo che $y = \pm 1$. Se invece $\lambda = 1$ dalla seconda equazione si ricava che $y = \frac{1}{2}$ e quindi dall' ultima equazione si ricava che $x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$. Le soluzioni del sistema sono dunque i punti $(0, \pm 1)$ e $(\pm\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$. Notiamo che $f(0,1) = 1$, $f(0,-1) = -1$ e $f(\pm\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}) = \frac{5}{4}$ quindi anche con questo metodo si ottiene che il massimo di f è $\frac{5}{4}$ mentre il minimo è -1.

Esercizio 2 $f(x,y) = x^2 + xy + 4y^2 + 1$
$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + y$
$\frac{\partial f}{\partial y} = x + 8y$
Per il principio dei moltiplicatori di Lagrange i punti di massimo e minimo di f sull'ellisse sono soluzioni del sistema $\begin{cases} 2x + y = 2\lambda x \\ x + 8y = 8\lambda y \\ x^2 + 4y^2 = 4 \end{cases}$
Il sistema non ha soluzione se $x = 0 \vee y = 0$ dunque supponedo $x, y \neq 0$ si ha che
$\lambda = \dfrac{2x + y}{2x} = \dfrac{x + 8y}{8y} \Longrightarrow 16xy + 8y^2 = 2x^2 + 16xy \Longrightarrow x^2 = 4y^2$. Sostituendo nell' ultima equazione si ricava $8y^2 = 4 \Longrightarrow y = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ con $x^2 = 4y^2 \Longrightarrow x = \pm\sqrt{2}$
Dunque le soluzioni sono $(\sqrt{2}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}})$ e $(-\sqrt{2}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}})$

$f(\sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}) = f(-\sqrt{2}, -\frac{1}{\sqrt{2}}) = 6$
$f(\sqrt{2}, -\frac{1}{\sqrt{2}}) = f(-\sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}) = 4$
Quindi il massimo di f è 6 e il minimo è 4

Esercizio 3 $f(x, y) = xe^{x^2-2y^2}$
$\frac{\partial f}{\partial x} = e^{x^2-2y^2} + 2x^2e^{x^2-2y^2} = e^{x^2-2y^2}(1 + 2x^2)$
$\frac{\partial f}{\partial y} = -4xye^{x^2-2y^2}$
Per il principio dei moltiplicatori di Lagrange i punti di massimo e minimo di f in A sono soluzioni del sistema $\begin{cases} e^{x^2-2y^2}(1 + 2x^2) = 2\lambda x \\ -4xye^{x^2-2y^2} = -2\lambda y \\ x^2 - y^2 = 1 \end{cases}$
dalla seconda equazione si ottiene che $y = 0$ oppure $2xe^{x^2-2y^2} = \lambda$
Se $y = 0$ allora si ottiene $x = \pm 1$ (e $\lambda = \pm 3e$)
Se invece $2xe^{x^2-2y^2} = \lambda$ allora sostituendo nella prima equazione otteniamo $e^{x^2-2y^2}(1+2x^2) = 4x^2e^{x^2-2y^2} = 0 \Longrightarrow e^{x^2-2y^2}(1-2x^2) = 0 \Longrightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ ma sostituendo nell'ultima equazione otteniamo che $\frac{1}{2} - y^2 = 1$ quindi in questo caso il sistema non ha soluzione. Dunque le uniche soluzioni del sistema sono $(1, 0)$ e $(-1, 0)$
Gli altri possibili punti di massimo o minimo sono i punti $(-2, \pm\sqrt{3})$
$f(1, 0) = e$
$f(-1, 0) = -e$
$f(-2, \pm\sqrt{3}) = -2e^{-2}$
Dunque il massimo di f è e mentre il minimo è $-e$

Esercizio 4 $f(x, y) = x^2 + \sqrt{2x^2 + y^2} \qquad A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \quad x^2 + 2y^2 \leq 1\}$
$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + \frac{2x}{\sqrt{2x^2 + y^2}} = 2x\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2x^2 + y^2}}\right)$
$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{2x^2 + y^2}}$
Notiamo che le derivate di f non sono mai nulle per $(x, y) \neq (0, 0)$ e che nel punto $(0, 0)$ la funzione non è differenziabile. L'unico possibile punto di massimo o minimo locale interno ad A è dunque il punto $(0, 0)$. Cerchiamo ora i possibili punti di massimo o minimo sul bordo di A risolvendo il sistema
$$\begin{cases} 2x\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2x^2+y^2}}\right) = 2\lambda x \\ \frac{y}{\sqrt{2x^2+y^2}} = 4\lambda y \\ x^2 + 2y^2 = 1 \end{cases}$$
Dalla seconda equazione si ricava che $y = 0 \vee \lambda = \frac{1}{4\sqrt{2x^2+y^2}}$
Se $y = 0$ sostituendo nell' equazione del vincolo ricaviamo $x = \pm 1$
Se $\lambda = \frac{1}{4\sqrt{2x^2+y^2}}$ sostituendo nella prima equazione otteniamo
$$2x\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2x^2 + y^2}}\right) = \frac{x}{2\sqrt{2x^2 + y^2}} \Rightarrow 2x\left(1 + \frac{3}{4\sqrt{2x^2 + y^2}}\right) = 0$$
$\Longrightarrow x = 0 \Longrightarrow y = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$
Dunque i possibili punti di massimo o mininimo della funzione sono $(0, 0)$

$(0, \pm\frac{1}{\sqrt{2}})$ e $(\pm 1, 0)$
$f(0,0) = 0$
$f(\pm 1, 0) = 1 + \sqrt{2}$
$f(0, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}) = \frac{1}{\sqrt{2}}$
Quindi il massimo di f è $1 + \sqrt{2}$ e il minimo è 0

Esercizio 5 Dobbiamo cercare il minimo della funzione $f(x,y) = x^2 + y^2$ sul vincolo $17x^2 + 12xy + 8y^2 = 100$ Utilizzando il metodo dei moltiplicatori di lagrange dobbiamo cercare le soluzioni del sistema $\begin{cases} 2x = \lambda(34x + 12y) \\ 2y = \lambda(12x + 16y) \\ 17x^2 + 12xy + 8y^2 = 100 \end{cases}$
notiamo che il sistema non ha soluzion se $xy = 0$ e che per $xy \neq 0$ si ha $\frac{1}{\lambda} = \frac{17x+6y}{x} = \frac{6x+8y}{y} \Longrightarrow 17xy + 6y^2 = 6x^2 + 8xy \Longrightarrow 2x^2 - 3xy - 2y^2 = 0$. moltipliacando questa equazione per 4 e sommandola all' equazione $17x^2 + 12xy + 8y^2 = 100$ si ottiene che $25x^2 = 100 \Longrightarrow x = \pm 2$. Se $x = 2$ nell' equazione $2x^2 - 3xy - 2y^2 = 0$ si ottiene che $y^2 + 3y - 4 = 0 \Longrightarrow y = 1 \vee y = -4$. Se invece x=-2 si ha che $y^2 - 3y - 4 = 0 \Longrightarrow y = -1 \vee y = 4$. I possibili punti di minimo sono quindi i punti $(2,1), (2,-4), (-2,-1), (-2,4)$. Notiamo che $f(2,1) = f(-2,-1) = 5$ e $f(2,-4) = f(-2,4) = 20$ Quindi i punti dell' ellisse che distano meno dall' origine sono i punti $(2,1)$ e $(-2,-1)$

Esercizio 6 $f(x,y) = \dfrac{1}{x^2 + y^2 + 1}$ $A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy \leq 1 \text{ e } 2x - 1 \leq y \leq \frac{1}{2}x + 1\right\}$
$\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{-2x}{(x^2+y^2+1)^2}$
$\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{-2y}{(x^2+y^2+1)^2}$
Cerchiamo per prima cosa i massimi e i minimi interni ad A. Notiamo che ∇f si annulla solo in $(0,0)$ quindi l'unico punto stazionario di f nell'interno di A è (0,0). Osserviamo che il bordo dell' insieme è unione dei tre insiemi
$B_1 = \left\{(x,y) \mid xy = 1, -2 \leq x \leq -\frac{1}{2}\right\}$
$B_2 = \left\{(x,y) \mid y = 2x - 1, -\frac{1}{2} \leq x \leq 1\right\}$
$B_3 = \left\{(x,y) \mid y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}, -2 \leq x \leq 1\right\}$. Cerchiamo i possibili massimi e minimi su B_1 risolvendo il sistema $\begin{cases} \frac{-2x}{(x^2+y^2+1)^2} = \lambda y \\ \frac{-2y}{(x^2+y^2+1)^2} = \lambda x \\ xy = 1 \end{cases}$
Sommando le prime due equazioni si ottiene che
$\dfrac{-2}{(x^2+y^2+1)^2}(x+y) = \lambda(x+y)$ dunque poichè in B_1 si ha $x + y \neq 0$ otteniamo che $\dfrac{-2}{(x^2+y^2+1)^2} = \lambda$ e sostituendo nella prima equazione
$\dfrac{-2x}{(x^2+y^2+1)^2} = \dfrac{-2y}{(x^2+y^2+1)^2} \Longrightarrow x = y$ Dunque $x = y = \pm 1$
Le soluzioni del sistema sono i punti $(1,1)$ e $(-1,-1)$.Solamente il punto $(-1,1)$ si trova però in B_1 Studiamo ora la funzione nell' insieme B_2 risolvendo $\begin{cases} \frac{-2x}{(x^2+y^2+1)^2} = -2\lambda \\ \frac{-2y}{(x^2+y^2+1)^2} = \lambda \\ y = 2x - 1 \end{cases}$
Dalle prime due equazioni si ricava che $x = -2y$ e quindi sostituendo nell' ultima si ricava che $y = -\frac{1}{5}$ $x = \frac{2}{5}$

Infine studiamo la funzione su B_3 risolvendo $\begin{cases} \frac{-2x}{(x^2+y^2+1)^2} = -\frac{1}{2}\lambda \\ \frac{-2y}{(x^2+y^2+1)^2} = \lambda \\ y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \end{cases}$

Dalle prime due equazioni ricaviamo che $y = -2x$ e quindi dall'ultima equazione si trova che $x = -\frac{1}{5}$ e che $y = \frac{2}{5}$.

Oltre ai punti che abbiamo trovato nel risolvere questi sistemi dobbiamo tenere conto anche dei punti in cui si intersecano i vincoli cioè i punti $(1,1)$, $(-\frac{1}{2},-2)$,$(-2,-\frac{1}{2})$.

$f(0,0) = 1$

$f(\frac{2}{5},-\frac{1}{5}) = f(-\frac{1}{5},\frac{2}{5}) = \frac{5}{6}$

$f(\pm,\pm 1) = \frac{1}{3}$

$f(-2,-\frac{1}{2}) = f(-\frac{1}{2},-2) = \frac{4}{20}$

Dunque il massimo di f è 1 e il minimo è $\frac{4}{20}$

Esercizio 7 Sia $f(x,y) = x^3 + y^3 - x^2 - y^2$ $\quad \nabla f(x,y) = (3x^2 - 2x, 3y^2 - 2y)$ Notiamo che $f(1,1) = 0$ e $\nabla f(1,1) = (1,1) \neq (0,0)$ quindi per il teorema del dini intorno al punto $(1,1)$ la curva $x^3 + y^3 - x^2 - y^2 = 0$ è il grafico di una funzione $y = \phi(x)$. Ma la retta tangente alla funzione $y = \phi(x)$ nel punto (1,1) è $y - 1 = \phi'(1)(x-1)$ e per il teorema del dini $\phi'(1) = -\frac{f_x(1,1)}{f_y(1,1)} = -1$ quindi nel nostro caso abbiamo che $y - 1 = 1 - x$ ovvero $x + y = 2$

Un altro modo per determinare l'equazione di questa retta è ricordare che in generale l'equazione della retta ortogonale ad un vettore (a,b) e passante per un punto (x_0,y_0) è $a(x-x_0)+b(y-y_0) = 0$. Nel nostro caso sappiamo che $\nabla f(1,1)$ è ortogonale alla curva $x^3+y^3-x^2-y^2 = 0$ quindi la retta che cerchiamo è la retta perpendicolare a $\nabla f(1,1) = (1,1)$ e passante per $(1,1)$ cioè la retta $(x-1)+(y-1) = 0$ che è di nuovo $x + y = 2$

Esercizio 8

1. Notiamo per prima cosa che l'insieme Γ_c è non vuoto solo se $x^4-x^2-c \leq 0$ per qualche valore di x e questo si ha solo per $c \geq -\frac{1}{4}$ Notiamo che $\nabla f(x,y) = (4x^3 - 2x, 2y)$ si annulla solo nei punti $(0,0)$ e $(\pm\frac{1}{\sqrt{2}},0)$. $f(0,0) = 0$ quindi $(0,0) \in \Gamma_0$ e $f(\pm\frac{1}{\sqrt{2}},0) = -\frac{1}{4}$ quindi $(\pm\frac{1}{\sqrt{2}},0) \in \Gamma_{-\frac{1}{4}}$
   -Se $c \neq 0$ e $c \neq -\frac{1}{4}$ in Γ_c non ci sono punti in cui ∇f è nullo e quindi per il teorema del dini Γ_c è localmente un grafico cartesiano. Inoltre si può disegnare l' insieme studiando il grafico delle funzioni $\sqrt{x^2 - x^4 + c}$ e $-\sqrt{x^2 - x^4 + c}$. Graficamente vediamo che se $-\frac{1}{4} < c < 0$ l'insieme Γ_c è unione di due curve disgiunte mentre se $c > 0$ Γ_c è costituito da una sola curva.
   -Se $c = 0$ l'insieme Γ_0 non è un grafico cartesiano in intorni del punto (0,0). Graficamente si vede che Γ_0 è un insieme a forma di otto.
   -Se $c = -\frac{1}{4}$ l'insieme è costituito dai soli punti $(\pm\frac{1}{\sqrt{2}},0)$
2. Sia g(x,y)=f(x,y)-1. Notiamo che Γ_1={g=0} quindi possiamo procedere come nell'esercizio precedente.Siccome $g(1,1) = 0$ e $\nabla g(1,1) = \nabla f(1,1) = (2,2)$ la retta che cerchiamo sarà $2(x-1)+2(y-1) = 0$ cioè $x + y = 2$
3. Notiamo che $f(1,\sqrt{2}) = 2$ quindi effettivamente $(1,\sqrt{2}) \in \Gamma_2$. Sappiamo che $\nabla f(1,\sqrt{2}) = (2,2\sqrt{2})$ è ortogonale a Γ_2 nel punto $(1,\sqrt{2})$ quindi un versore normale sarà dato da
   $n = \frac{\nabla f(1,\sqrt{2})}{\|\nabla f(1,\sqrt{2})\|} = (\frac{1}{\sqrt{3}},\sqrt{\frac{2}{3}})$

Esercizio 9 $f(x,y) = y^5 - y^4 \sin x$

$f_x(x,y) = -y^4 \cos x \quad f_y(x,y) = 5y^4 - 4y^3 \sin x = y^3(5y - 4\sin x)$ I punti stazionari di f sono le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} -y^4 \cos x = 0 \\ y^3(5y - 4\sin x) = 0 \end{cases}$$

Notiamo che tutti i punti della forma $(x,0)$ sono soluzioni del sistema. Se $y \neq 0$ allora dalla prima equazione si ricava che $\cos x = 0 \Longrightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \vee x = \frac{3}{2}\pi + 2k\pi \;\; k \in \mathbb{Z}$. Se $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ allora $y = \frac{4}{5}\sin x = \frac{4}{5}$ mentre se $x = \frac{3}{2}\pi + 2k\pi$ allora $y = -\frac{4}{5}$ Riassumendo le soluzioni del sistema sono i punti $(x,0)$ con $x \in \mathbb{R}$,$(\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{4}{5})$ e $(\frac{3}{2}\pi + 2k\pi, -\frac{4}{5})$ Studiando il segno della funzione si ricava che :

-I punti $(k\pi, 0)$ non sono nè punti di massimo nè punti di minimo

-I punti $(x,0)$ con $2k\pi < x < (2k+1)\pi$ sono punti di massimo locale

-I punti $(x,0)$ con $(2k+1)\pi < x < (2k+2)\pi$ sono punti di minimo locale

-I punti $(\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{4}{5})$ sono punti di minimo locale

-I punti $(\frac{3}{2}\pi + 2k\pi, -\frac{4}{5})$ sono punti di massimo locale

Esercizio 10 $f(x) = \displaystyle\int_x^{x^3} t^2 e^{-x^2t^2} dt$

Sia $F(y,z) = \displaystyle\int_y^{y^3} t^2 e^{-z^2t^2} dt.$

Sappiamo che $\nabla f(y,z) = (3y^8 e^{-z^2y^6} - y^2 e^{-z^2y^2}, \displaystyle\int_y^{y^3} -2zt^2 e^{-z^2t^2} dt)$. Notiamo inoltre che $f(x) = F(x,x)$ e quindi per la formula di derivazione delle funzioni composte si ha che

$$f'(x) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,x) + \frac{\partial f}{\partial y}(x,x) = 3x^8 e^{-x^8} - x^2 e^{-x^4} - 2x \int_x^{x^3} t^2 e^{-x^4} dt$$

Esercizio 11 $f(x,y) = \displaystyle\int_x^y e^{-t^2} dt$

$\dfrac{\partial f}{\partial x} = -e^{-x^2}$

$\dfrac{\partial f}{\partial y} = e^{-y^2}$

Notiamo che $\nabla f \neq 0$ qunidi non ci sono punti stazionari interni al disco. Cerchiamo dunque i punti di massimo e minimo nell' insieme $x^2 + y^2 = 1$.Per il principio dei moltipliacatori di lagrange questi punti saranno soluzioni del sistema $\begin{cases} -e^{-x^2} = 2\lambda x \\ e^{-y^2} = 2\lambda y \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$ Sia $g(t) = \frac{e^{-t^2}}{t}$.Studiando la funzione g si vede che g è dispari e biettiva e quindi si ha che $g(t) = -g(s) \Leftrightarrow t = -s$.Notiamo che se $xy \neq 0$ allora il sistema può essere scritto nella forma $\begin{cases} -g(x) = 2\lambda \\ g(y) = 2\lambda \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$ .Dalle prime due equazioni si ricava che $g(y) = -g(x)$ e quindi per quanto abbiamo detto si ha che $y = -x$. Sostituendo nell' equazione del vincolo otteniamo che $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ e quindi $y = \mp\frac{1}{\sqrt{2}}$. Se $x = 0$ invece abbiamo che $y = \pm 1$ mentre se $y = 0$ si ottiene che $x = \pm 1$. Riassumendo le soluzioni del sistema sono i punti $(0, \pm 1), (\pm 1, 0), (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$ e $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$

$$f(0,1) = f(-1,0) = \int_0^1 e^{-t^2} dt \qquad f(0,-1) = f(1,0) = -\int_0^1 e^{-t^2} dt$$

$$f(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}) = -\int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} e^{-t^2}dt \qquad f(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}) = \int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} e^{-t^2}dt$$

Confrontando questi valori ricaviamo che il massimo di f è $\int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} e^{-t^2}dt$ mentre il minimo è $-\int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} e^{-t^2}dt$