AM2: Tracce delle lezioni- V Settimana

FUNZIONI DI PIÚ VARIABILI

Sia $n \in \mathbf{N}$. Una funzione reale di n variabili reali é una funzione definita in un sottoinsieme di $\mathbf{R}^n = \mathbf{R} \times \ldots \times \mathbf{R}$ n volte (insieme delle n-uple ordinate di numeri reali, o vettori $v = (x_1, \ldots, x_n)$) e a valori in $\mathbf{R}$.

Ad esempio, $f(x_1, \ldots, x_n) = a_1 x_1 + \ldots + a_n x_n$ (funzione lineare).

STRUTTURA ALGEBRICA in $\mathbf{R}^n$: Sia $u = (x_1, \ldots, x_n)$, $v = (y_1, \ldots, y_n)$

$u + v := (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$ (**addizione**)

$t\,u := (tx_1, \ldots, tx_n)\,, \quad \forall \quad t \in \mathbf{R}$ (**moltiplicazione per uno scalare**).

Interpretazione geometrica. Come noto, $\mathbf{R}^2$ si rappresenta mediante i punti di un piano cartesiano Oxy.

In tale piano, dato v, l'insieme $\mathbf{R}\,v := \{tv : \ t \in \mathbf{R}\}$ é l'insieme dei punti della retta uscente dall'origine $O := (0,0)$ e passante per v; $\{tv + u : \ t \in \mathbf{R}\}$ é la (rappresentazione parametrica della) retta passante per u e parallela alla retta $\mathbf{R}\,v$.

In particolare, $u + v$ é il punto comune alle rette $\{tu + v : \ t \in \mathbf{R}\}$ e $\{u + tv : \ t \in \mathbf{R}\}$ e si chiama traslazione di u lungo v. Tale interpretazione geometrica si estende al caso generale $n > 2$.

PRODOTTO SCALARE Siano $u = (x_1, \ldots, x_n)$, $v = (y_1, \ldots, y_n)$.

$< u, v > := x_1\, y_1 + \ldots + x_n y_n$ é il prodotto scalare tra u e v. Proprietá

positivitá $0 \le < u, u > \ \forall u \in \mathbf{R}^n$

simmetria $< u, v > = < v, u > \ \forall u, v \in \mathbf{R}^n$

bilinearitá $< au + bv, h > = a < u, h > + b < v, h > \ \forall a, b \in \mathbf{R}$

STRUTTURA METRICA in $\mathbf{R}^n$: Sia $u = (x_1, \ldots, x_n)$.

$\|u\| := \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2} = \sqrt{< u, u >}$ (**norma** di u)

Se $u, \ v \in \mathbf{R}^n$ é $d(u, v) := \|u - v\|$ (**distanza** tra u, v.)

Interpretazione geometrica. In $\mathbf{R}^2$, $\|u\| := \sqrt{x^2+y^2}$ é la lunghezza del segmento (o lunghezza del vettore u) che unisce il punto $u = (x,y)$ all'origine , e $d(u,v)$ é la distanza tra i punti u e v. Analoga interpretazione geometrica in $\mathbf{R}^n$.

CAUCHY-SCHWARTZ $\quad | < u,v > | \ \leq \ ||u||\,||v|| \qquad \forall u,v \in \mathbf{R}^n$. Infatti

$$0 \leq \ < u+tv, u+tv >= ||u||^2 + 2t < u,v > + t^2||v||^2 \ \forall t \ \Rightarrow \ < u,v >^2 - ||u||^2\,||v||^2 \leq 0$$

Proprietá della norma

(i) $\ ||tu|| = |t|\,||u|| \quad \forall u \in \mathbf{R}^2,\ t \in \mathbf{R}$ (**omogeneitá**)

(ii) $\ ||u+v|| \leq ||u|| + ||v|| \quad \forall u,v \in \mathbf{R}^2$ (**diseguaglianza triangolare**)

La (i) é ovvia, mentre (ii) segue dalla diseguaglianza di Cauchy-Schwartz:

$$\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2 < u,v > \ \leq \ \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2\|u\|\,\|v\| = (\|u\| + \|v\|)^2$$

Proprietá della distanza

(i) $\ 0 \leq d(u,v), \quad \forall u,v \in \mathbf{R}^n \qquad d(u,v) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad u = v$ (**positivitá**)
(ii) $\ d(u,v) = d(v,u) \quad \forall u,v \in \mathbf{R}^n$ (**simmetria**)
(iii) $\ d(u,v) \leq d(u,w) + d(w,v) \ \ \forall u,v,w \in \mathbf{R}^n$ (**diseguaglianza triangolare**)

NOTAZIONE. $\quad D := \{u : \ ||u|| < 1\}$, e, se $r > 0,\ v \in \mathbf{R}^n$:

$$D_r := rD := \{ru : u \in D\} = \{u : ||u|| < r\}, \ \ D_r(v) := D_r + v := \{u+v : u \in D_r\}$$

D_r é disco di raggio r centrato in zero, $D_r(v)$ é disco di raggio r centrato in v.

SUCCESSIONI CONVERGENTI in $\mathbf{R}^n$ $\quad u_k \to_k u \quad \Leftrightarrow \quad ||u_k - u|| \to_k 0$

NOTA. (i) Se $\ u_k = (x_{k,1}, \ldots, x_{k,n}), \ \ u = (x_1, \ldots, x_n),$ allora
$u_k \to u \quad \Leftrightarrow \quad x_{k,1} \to_k x_1, \ldots, \quad x_{k,n} \to_k x_n$.
Infatti $\qquad ||u_k - u||^2 = \sum_{j=1}^{n} |x_{k,j} - x_j|^2$

(ii) $\quad u_k$ converge $\Rightarrow \sup_k ||u_k|| < +\infty$

DEFINIZIONE (insiemi limitati, aperti, chiusi, compatti)

(i) $B \subset \mathbf{R}^n$ é **limitato** se esiste $r > 0 :\ B \subset D_r$

(ii) $O \subset \mathbf{R}^n$ é **aperto** se $\forall u \in O\ \exists r > 0 :\ D_r(u) \subset O$

(ii) $F \subset \mathbf{R}^n$ é **chiuso** se F' é aperto

(iii) $K \subset \mathbf{R}^n$ é **compatto** se é chiuso e limitato

PROPOSIZIONE 1

(i) $F \subset \mathbf{R}^n$ é **chiuso** $\Leftrightarrow$ $(u_k \in F,\ u_k \to_k u \quad \Rightarrow \quad u \in F)$

(ii) $K \subset \mathbf{R}^n$ é **compatto** $\Leftrightarrow$ $(u_k \in K \quad \Rightarrow \quad \exists\ u_{k_j},\, u \in K :\ u_{k_j} \to u)$.

Prova. (i) $\Rightarrow$: $u \notin F \Rightarrow \exists r > 0 :\ D_r(u) \subset F'$ mentre $u_k \in F \cap D_r(u)$ definitivamente. $\Leftarrow$: Se $u \notin F$, deve esistere $r > 0 :\ D_r(u) \subset F'$, altrimenti $\forall k,\ \exists\ u_k \in D_{\frac{1}{k}}(u) \cap F$. Ma $u_k \in F \cap D_{\frac{1}{k}}(u) \Rightarrow u_k \to_k u \Rightarrow u \in F$.

(ii) $\Rightarrow$: $u_k = (x_{k,1}, \dots, x_{k,n}) \in K \Rightarrow \sup_k |x_{k,j}| < +\infty\ \forall j = 1, \dots, n \Rightarrow \exists k_i,\ \exists\ x_1, \dots, x_n :\ x_{k_i,j} \to_i x_j$ per $j = 1, \dots, n \Rightarrow u_{k_i} \to_i u = (x_1, \dots, x_n) \in K$ perché K é chiuso.

$\Leftarrow$: Se K é non limitato, esiste $u_k \in K$ con $||u_k|| \to +\infty$. Per ogni estratta u_{k_i} é ugualmente vero che $||u_{k_i}|| \to_i +\infty$ e quindi u_{k_i} non puó convergere (sarebbe limitata !). Se K non é chiuso, esiste $u \notin K$ e $u_k \in K$ con $u_k \to u$ e quindi u_k non ha sottosuccessioni convergenti in K.

DEFINIZIONE (di limite) Sia $f : A \to \mathbf{R},\ \ A \subset \mathbf{R}^n$. Sia $\dot{D}_r(u) = D_r(u) \setminus \{u\}$. Sia u_0 tale che $\dot{D}_r(u_0) \cap A$ é non vuoto $\forall r > 0$. Allora

$$\lim_{u \to u_0} f = l \Leftrightarrow (\forall \epsilon > 0,\ \exists \delta_\epsilon > 0 :\ u \in A \cap \dot{D}_{\delta_\epsilon}(u_0) \Rightarrow |f(u) - l| \le \epsilon)$$

$$\lim_{u \to u_0} f = +\infty \Leftrightarrow (\forall M > 0,\ \exists \delta_\epsilon > 0 :\ u \in A \cap \dot{D}_{\delta_\epsilon}(u_0) \Rightarrow f(u) \ge M)$$

Se $D'_r \cap A$ é non vuoto per ogni $r > 0$, allora

$$\lim_{||u|| \to +\infty} f = l \Leftrightarrow (\forall \epsilon > 0,\ \exists \mathbf{R}_\epsilon > 0 :\ u \in A,\ ||u|| \ge R_\epsilon \Rightarrow |f(u) - l| \le \epsilon)$$

$$\lim_{||u|| \to +\infty} f = +\infty \Leftrightarrow (\forall M > 0,\ \exists R_M > 0 :\ u \in A,\ ||u|| \ge R_M \Rightarrow f(u) \ge M)$$

NOTA. Come per le funzioni di una variabile si vede facilmente che

(i) $\quad f$ ha limite l per u tendente a u_0 $\quad$ ($|u|$ tendente a $+\infty$) $\qquad \Leftrightarrow$

$$(u_n \in A,\ \ u_n \neq u_0,\ \ u_n \to u_0 \ \ (|u_n| \to +\infty\ ) \ \Rightarrow \ f(u_n) \to \ l)$$

(ii) $\quad$ (**Cauchy**) $\quad f$ ha limite l per u tendente a u_0 $\qquad \Leftrightarrow$

$$(\forall \epsilon > 0,\ \ \exists \delta_\epsilon > 0 : \quad u, v \in A \cap \dot{D}_{\delta_\epsilon}(u_0) \ \Rightarrow \ |f(u) - f(v)| \leq \epsilon)$$

f ha limite l per $|u|$ tendente a $+\infty$ $\qquad \Leftrightarrow$

$$(\forall \epsilon > 0,\ \ \exists R_\epsilon > 0 : \quad u, v \in A,\ \ |u|, |v| \geq R_\epsilon \ \Rightarrow \ |f(u) - f(v)| \leq \epsilon)$$

DUE ESEMPI . $\quad$ **(i)** Sia $\quad f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2} \quad$ se $\ x^2 + y^2 \neq 0.$

Dalla NOTA-(i) si vede subito che $\lim\limits_{u \to u_0} f(u) = f(u_0)\ \forall u_0 \neq 0.$ $\quad$ Invece,

$\lim\limits_{u \to 0} f(u)$ $\quad$ e $\quad \lim\limits_{|u| \to +\infty} f(u)$ $\quad$ non esistono: $\quad f(tx, ty) \equiv \frac{xy}{x^2+y^2}$

(ii) Sia $\quad f(x,y) = \frac{x^2 y}{x^2+y^2} \quad$ se $\ x^2 + y^2 \neq 0.$ Come sopra, $\lim\limits_{u \to u_0} f(u) = f(u_0)\ \forall u_0 \neq 0.$ Ed é anche $\lim\limits_{u \to 0} f(u) = 0$: $\quad |\frac{x^2 y}{x^2+y^2}| \leq \frac{|x|}{2} \leq \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{2}$;

Poi, $\lim\limits_{|u| \to +\infty} f(u)$ $\quad$ non esiste: $\qquad f(x,x) = \frac{x}{2} \to_{x \to \pm\infty} \pm\infty$.

DEFINIZIONE (continuitá) $\quad$ Sia $f : A \to \mathbf{R},\ \ A \subset \mathbf{R}^n,\ \ \ u_0 \in A.$

f é continua in u_0 se $\quad \lim\limits_{u \to u_0} f$ $\quad$ esiste e $\quad \lim\limits_{u \to u_0} f = f(u_0).$
f é continua in A se é continua in ogni punto di A. $\quad C(A)$ indicherá la classe delle funzioni continue in A.

Proposizione 1 $\quad$ Sia $f : A \to \mathbf{R}, u \in A.$ $\quad$ Allora

$$f \ \text{ é continua in } \ u \quad \Leftrightarrow \quad (u_n \in A, \quad u_n \to_n u \quad \Rightarrow \quad f(u_n) \to f(u)$$

Proposizione 2 $\quad$ Siano $f, g : A \to \mathbf{R}, u \in A.$ $\quad$ Allora

(i) f, g continue in $u \quad \Rightarrow \quad \alpha f + \beta g$ é continua in u $\forall \alpha, \beta \in \mathbf{R}$
(ii) f, g continue in $u \quad \Rightarrow \quad fg$ é continua in u e $\frac{f}{g}$ é continua in u se $g(u) \neq 0$
(iii) se $f(A) \subset B$ e $\phi : B \to \mathbf{R}$ é continua in $f(u)$, allora $\phi \circ f$ é continua in u.

Ad esempio, i polinomi in $x_1, \ldots, x_n$ sono continui in $\mathbf{R}^n$, $\ exp(x^2 + y^2)$ é continua in $\mathbf{R}^2$, etc.

1. Esercizio Dati $\alpha,\ \beta\ >\ 0,$ sia

$$f(x,y)\ =\ \frac{|x|^{\alpha}\,|y|^{\beta}}{x^2+y^2}\quad \text{se}\quad x^2+y^2\ \neq\ 0,\quad f(0,0)\ =\ 0$$

Provare che f é continua in $(0,0)$ $\Leftrightarrow$ $\alpha\ +\ \beta\ >\ 2$

Deriviamo dapprima la diseguaglianza:

$$(*)\qquad \alpha,\ \beta\ >\ 0,\quad \alpha\ +\ \beta\ =\ 2\quad \Rightarrow\quad |x|^{\alpha}\,|y|^{\beta}\ \leq\ \frac{1}{2}\max\{\alpha,\beta\}\,(x^2+y^2)$$

ponendo $p\ =\ \frac{2}{\alpha},$ $q\ =\ \frac{2}{\beta},$ $a\ =\ |x|^{\alpha},$ $b\ =\ |y|^{\beta}$ nella (ben nota?) diseguaglianza di Holder

$$(**)\qquad p,q>1,\quad \frac{1}{p}\ +\ \frac{1}{q}\ =\ 1\quad \Rightarrow\quad ab\ \leq\ \frac{a^p}{p}\ +\ \frac{b^q}{q}\qquad \forall a,b\geq 0$$

Se $\alpha+\beta-2\leq 0,$ $f(tx,ty)\ =\ t^{\alpha+\beta-2}f(x,y)$ non va a zero al tendere di t a zero (se $x^2+y^2\neq 0$) e quindi f non é continua in $(0,0)$.

Sia dunque $\alpha\ +\ \beta\ -\ 2\ >\ 0.$

Se $\alpha\geq 2$ é $f(x,y)\leq |x|^{\alpha-2}\,|y|^{\beta}\to_{x^2+y^2\to 0} 0$. Analogamente se $\beta\geq 2$.

Resta da considerare il caso $\alpha,\ \beta\ <\ 2$. In tal caso, se $\delta := \frac{\alpha+\beta}{2}-1,$ da $\alpha+\beta\ >\ 2$ segue $\delta\ >\ 0$ mentre $\alpha\ <\ 2$ $\Rightarrow$ $\delta\ <\ \beta$ e, analogamente $\delta\ <\ \alpha$. Dunque, siccome $\alpha+\beta-2\delta=2$, dalla diseguaglianza $(*)$ segue

$$f(x,y)\ =\ \frac{|x|^{\alpha-\delta}\,|y|^{\beta-\delta}}{x^2+y^2}\,(|x|^{\delta}\,|y|^{\delta}\,)\leq\ (|x|^{\delta}\,|y|^{\delta}\,)\leq \left[\frac{x^2+y^2}{2}\right]^{\delta}\to_{x^2+y^2\to 0} 0$$

2. Prova della diseguaglianza di Holder $(**)$

Per ogni $y\ \geq 0$ la funzione $x\to xy\ -\ \frac{x^p}{p},$ $x\geq 0$ é superiormente limitata e raggiunge il suo massimo in $x(y)$ tale che $y\ -\ x^{p-1}\ =\ 0$ ovvero $x(y)\ =\ y^{\frac{1}{p-1}}$ e tale massimo vale $y\,y^{\frac{1}{p-1}}\ -\ \frac{y^{\frac{p}{p-1}}}{p}\ =\ \frac{1}{q}\,y^{\frac{p}{p-1}}\ =\ \frac{y^{\frac{1}{q}}}{q}.$ Dunque

$$xy\ -\ \frac{x^p}{p}\ \leq\ \frac{y^{\frac{1}{q}}}{q}\qquad \forall x,y\geq 0$$

3. Esercizio Sia $g(x,y)\ =\ \frac{|x|^{\alpha}\,|y|^{\beta}}{x^4+y^2}$ se $x^2+y^2\ \neq\ 0,$ $g(0,0)\ =\ 0,$ $\alpha,\ \beta\ >\ 0.$ Provare che g é continua in $(0,0)$ $\Leftrightarrow$ $\alpha\ +\ 2\beta\ >\ 4$