

Esercitazione AM2 n. 3 - A.A. 2007-2008 - 26/10/07

Differenziabilità di funzioni di più variabili

1. Mostrare che è continua ma non differenziabile nell'origine la funzione

$$f(x, y) \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

2. Verificare che la funzione $f(x, y) = |xy|^\alpha$ con $\alpha > 0$ è differenziabile nell'origine se e solo se $\alpha > \frac{1}{2}$.

3. Stabilire se è continua, derivabile, differenziabile in $(0, 0)$ la funzione $f(x, y) = \frac{1-\cos(xy)}{x^4+y^4}$.

4. Stabilire se ammette un prolungamento continuo, derivabile o differenziabile nell'origine la funzione $f(x, y) = x + \log\left(\frac{x^2+3y^2}{x^2+y^2}\right)$.

5*. Stabilire dove è differenziabile la funzione

$$f(x, y) \begin{cases} \arctan \frac{x}{y} & y \neq 0 \\ \frac{\pi}{2} & y = 0 \end{cases}$$

6. Studiare per ogni $x \in \mathbb{R}^N$ la continuità, differenziabilità, derivabilità e continuità delle derivate parziali della funzione

$$f(x) = \begin{cases} |x|^2 \sin \frac{1}{|x|} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

Soluzioni Esercitazione AM2 n. 3 - 26/10/07

1. Dalla disuguaglianza $2|xy| \leq (x^2 + y^2)$ segue subito la continuità in $(0, 0)$. Notiamo che $f_x(0, 0) = f_y(0, 0) = 0$ dato che $f(x, 0) = f(0, y) \equiv 0$ per ogni $(x, y) \neq (0, 0)$. Però f non è differenziabile nell'origine perché non esiste $\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{f(h,k) - f(0,0)}{\sqrt{h^2 + k^2}} = \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{hk}{h^2 + k^2}$ (tale limite è per esempio 0 nella direzione $(h, k) = (0, t)$ e vale $\frac{1}{2}$ nella direzione $(h, k) = (t, t)$).

2. Poiché f è identicamente nulla sugli assi coordinati, abbiamo $f_x(0, 0) = f_y(0, 0) = 0$. Bisogna quindi calcolare il $\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{|hk|^\alpha}{\sqrt{h^2 + k^2}}$. Nelle direzioni $(h, k) = (t, t)$ tale limite vale ∞ per ogni $\alpha < \frac{1}{2}$ e vale $\frac{1}{\sqrt{2}}$ per $\alpha = \frac{1}{2}$. Quindi f non è differenziabile per tali valori di α , mentre per $\alpha > \frac{1}{2}$ si ha $\frac{|hk|^\alpha}{\sqrt{h^2 + k^2}} \leq (h^2 + k^2)^{\alpha - \frac{1}{2}} \xrightarrow{(h,k) \rightarrow (0,0)} 0$, da cui f è differenziabile nell'origine.

3. Ricordando che $1 - \cos t = \frac{1}{2}t^2 + o(t^2)$, facendo il limite sulle rette $y = mx$ si vede subito che $\lim_{x \rightarrow 0} f(x, mx) = \frac{m^2}{2(1+m^4)}$, da cui f non è continua né differenziabile nell'origine. Però essendo f identicamente nulla sugli assi coordinati, f è derivabile parzialmente e $f_x(0, 0) = f_y(0, 0) = 0$.

4. Notiamo che $f(0, y) \equiv \log 3$ mentre $f(x, 0) \equiv 0$, quindi f non ammette prolungamento continuo né tantomeno differenziabile in $(0, 0)$. Ponendo $f(0, 0) = \log 3$, otteniamo che $f_x \equiv 1$ esiste continua anche in $(0, 0)$, mentre ponendo $f(0, 0) = 0$ è $f_y \equiv 0$ ad esistere ed essere continua anche in $(0, 0)$. Pertanto, $f(x, y)$ è derivabile con continuità rispetto ad una sola delle variabili in base al prolungamento scelto.

5. La funzione è chiaramente differenziabile per ogni $y \neq 0$, e risulta continua e differenziabile in $(x, 0)$ solo se $x > 0$. Infatti ricordando che $\arctan t + \arctan \frac{1}{t} = \pm \frac{\pi}{2}$ per $t \geq 0$ e passando a coordinate polari, $f(\rho, \vartheta) = \frac{\pi}{2} - \vartheta$ per $\vartheta \neq 0, \pi$ e $f(\rho, 0) = f(\rho, \pi) = \frac{\pi}{2}$, che è continua e differenziabile solo per $\rho \neq 0$ e $\vartheta \neq \pi$.

6. Ponendo $t = |x|$, si verifica facilmente che la funzione di una variabile $f(t) = t^2 \sin \frac{1}{t}$, $f(0) = 0$ è continua e derivabile su tutto

\mathbb{R} cosicché $f(x)$ risulta continua, derivabile e differenziabile per ogni $x \in \mathbb{R}^N$ con $f_{x_i}(0) = 0$ per ogni $i = 1, \dots, N$. Però le derivate parziali di f non sono continue in $x = 0$: infatti $f_{x_i} = 2x_i \sin \frac{1}{|x|} - \frac{x_i}{|x|} \cos \frac{1}{|x|}$ non ha limite per $x \rightarrow 0$.