Esercitazione AM2 n. 1 - A.A. 2007-2008 - 24/9/07

Serie di potenze e di Taylor

Stabilire se sono sviluppabili in serie di Maclaurin:

1. $f(x) = \sin(x^2)$.

2*. $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$

3. $f(x) = \log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$.

Calcolare l'insieme di convergenza delle seguenti serie di potenze:

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\arctan n}}{n(\log n+1)} x^n$.

5. $\sum_{n=0}^{\infty} x^n \int_n^{n+1} e^{-t^2}\, dt$.

6. $\sum_{n=1}^{\infty} (2^{3n} + 3^{2n}) x^n$.

7. $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi}{4}\right) x^{2n}$.

8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(1-x)^{2n}}$.

9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} x^n$.

10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n^2-n}}{n}$.

Soluzioni Esercitazione AM2 n. 1 - 24/9/07

1. La composizione di funzioni analitiche é analitica; peró, piú direttamente, sia $\sin x$ che x^2 sono intere e ovviamente:

$$|f^{(n)}(x)| = |P(x, \sin x, \cos x)| \leq M_r, \quad \forall\, |x| \leq r$$

dove P é un polinomio, da cui segue l'analiticitá su tutto $\mathbb{R}$.

2. Tale funzione é C^∞ ma non é analitica perché $f^{(n)}(0) = 0$ per ogni n (l' esponenziale batte qualsiasi polinomio) mentre $f > 0$ in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, quindi non puó coincidere con la sua serie di Taylor che é identicamente nulla.

3. Si ha che $\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \log(1+x) - \log(1-x)$ ed ovviamente la somma di funzioni analitiche é analitica. Lo sviluppo di Taylor segue dal fatto che

$$\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \log(1+x) - \log(1-x) =$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n = -2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n} x^{2n}$$

4. Il raggio di convergenza é $R = 1$. Convergenza puntuale in $[-1, 1)$, totale nei compatti contenuti (tramite criterio di condenzazione e di Leibniz).

5. Il raggio di convergenza é $R = +\infty$. Convergenza totale nei compatti (tramite teorema della media). Notare che il criterio del rapporto fornisce solo una stima del raggio di convergenza.

6. Il raggio di convergenza é $R = \frac{1}{9}$. Convergenza puntuale in $(-\frac{1}{9}, \frac{1}{9})$, totale nei compatti contenuti.

7. Il raggio di convergenza é $R = 1$. Convergenza puntuale in $(-1, 1)$, totale nei compatti contenuti.

8. Il raggio di convergenza é $R = 1$. Convergenza puntuale in $(-1, 1)$, totale nei compatti contenuti.

9. Il raggio di convergenza é $R = 1$. Convergenza puntuale in $(-e, e)$, totale nei compatti contenuti.

10. Il raggio di convergenza é $R = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$. Convergenza puntuale in $(-\frac{3-\sqrt{5}}{2}, \frac{3-\sqrt{5}}{2})$, totale nei compatti contenuti.