AM2: Tracce delle lezioni- X Settimana

IL TEOREMA DELLE CONTRAZIONI

Sia (X, d) spazio metrico completo, $C \subset X$ chiuso. Sia $T : X \to X$. Se

(i) $T(C) \subset C$
(ii) $\exists k \in (0,1) : \quad d(Tx, Ty) \leq d(x, y) \quad \forall\, x, y \in C$ (T é una **'contrazione'**)

allora $\exists! x \in C : \qquad Tx = x$

Unicitá: $Tx = x, \quad Ty = y \quad \Rightarrow \quad x = y.$ Infatti,
$d(x, y) = d(Tx, Ty) \leq k\, d(x, y) \quad \Rightarrow \quad d(x, y) = 0$ perché $k \in (0, 1)$.

Esistenza. Sia $x_0 \in C$. Consideriamo la successione definita per ricorrenza

$$x_1 := Tx_0, \quad x_2 := Tx_1, \quad \ldots, \quad x_{n+1} := Tx_n$$

Basta provare che x_n é di Cauchy, perché allora, per completezza, esiste x tale che $x_n \to x$ con $x \in C$ perché C é chiuso. Per continuitá $Tx_n \to_n Tx$. Siccome é anche $x_{n+1} \to x$ avremo $x = Tx$ (unicitá del limite).

Proviamo dunque che x_n é di Cauchy. É

$$d(x_2, x_1) = d(Tx_1, Tx_0) \leq kd(x_1, x_0)$$

Ugualmente, $d(x_3, x_2) = d(Tx_2, Tx_1) \leq kd(x_2, x_1) \leq k^2 d(x_1, x_0)$. Iterando,

$$d(x_{n+1}, x_n) = d(Tx_n, Tx_{n-1}) \leq kd(x_n, x_{x_{n-1}}) \leq k^n d(x_1, x_0) \quad \forall\, n$$

Dunque $\qquad d(x_{n+p+1}, x_n) \leq d(x_{n+p+1}, x_{n+p}) + \ldots + d(x_{n+1}, x_n) \leq$

$$\leq \Big[k^{n+p} + \ldots + k^n\Big]\, d(x_1, x_0) = k^n \left[\sum_{j=0}^{\infty} k^j\right] d(x_1, x_0) \ \to_n 0$$

Una applicazione: prova di 'mezzo' teorema del Dini

Sia $f \in C^1(\mathbf{R}^m_t \times \mathbf{R}^n_x, \mathbf{R}^n)$, $\quad f(0,0) = 0$. Sia $\mathcal{A} := \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$. Siccome $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ é supposta invertibile, l'equazione $f(t,x) = 0$ equivale a $g(t,x) := (\mathcal{A})^{-1} f(t,x) = 0$. Notiamo che, per la regola della catena, $\frac{\partial g}{\partial x}(0,0) = (\mathcal{A})^{-1}\mathcal{A} = Id$ (Id matrice identitá $n \times n$). Possiamo quindi supporre che $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = Id$ (matrice identitá.
Notiamo poi che l'equazione $f(t,x) = 0$ si puó riscrivere come $x - f(t,x) = x$,

ovvero come **problema di punto fisso** per $\quad T^t(x) := x - f(t,x), \quad x \in B_\sigma \subset \mathbf{R}^n.$

Dati $\delta, \sigma > 0$, siano $B_\delta(0)$ palla chiusa di raggio δ in $\mathbf{R}^m$, $B_\sigma(0)$ palla chiusa di raggio σ in $\mathbf{R}^n$. Siccome $\frac{\partial T^t}{\partial x_j}(0) = 0 \quad \forall j$ se $t = 0$, per continuitá e per il teorema del valor medio avremo che, per $\quad 0 < \delta \le \sigma << 1$,

$$x, y \in B_\sigma(0) \subset \mathbf{R}^n, \quad t \in B_\delta(0) \subset \mathbf{R}^m \qquad \Rightarrow \quad \|T^t(x) - T^t(y)\| \le \frac{1}{2}\|x - y\|$$

$$\|t\| \le \delta \quad \Rightarrow \quad \|T^t(x)\| \le \|T^t(x) - T^t(0)\| + \|f(0,t)\| \le \frac{1}{2}\|x\| + \frac{\sigma}{2} \le \sigma \quad \forall x \in B_\sigma$$

Dunque T^t é , se $\|t\|$ é piccola, contrazione di B_σ, palla chiusa di $\mathbf{R}^n$, in sé ed ha quindi in tale palla esattamente un punto fisso: l'equazione $f(t,x) = 0$ ha , per ogni $t \in B_\delta$ esattamente una soluzione $x = x(t)$ in B_σ.

NOTA. Resterebbe da provare che $x(t)$ é continua ed infatti di classe C^1.
La continuitá si puó dimostrare mediante il principio delle contrazioni applicato a

$$(\mathcal{T}\varphi)(t) := \varphi(t) - f(t, \varphi(t)), \quad \varphi \in C(B_\delta, \mathbf{R}^n)$$

Per il teorema sulla continuitá della funzione composta di funzioni continue,

$$\varphi \in C(B_\delta, \mathbf{R}^n) \Rightarrow \mathcal{T}\varphi \in C(B_\delta, \mathbf{R}^n)$$

Gli stessi calcoli indicati sopra mostrano che, per δ, σ piccoli risulta

$$\varphi \in C(B_\delta, B_\sigma) \Rightarrow \mathcal{T}\varphi \in C(B_\delta, B_\sigma)$$

ed é infatti una contrazione. Dunque $\mathcal{T}$ ha un unico punto fisso in $C(B_\delta, B_\sigma)$, cioé esiste una ed una sola funzione $\varphi \in C(B_\delta, B_\sigma)$ tale che $\varphi(t) - f(t, \varphi(t)) \equiv \varphi(t)$.

ESISTENZA ED UNICITÁ PER IL PROBLEMA DI CAUCHY

Equazioni differenziali lineari del I ordine

Date le funzioni $a(x), b(x)$ continue in (a,b) determinare, se esistono, le funzioni $y = y(x)$ di classe $C^1((a,b))$ tali che

$$(ED) \qquad y'(x) + a(x)y(x) = b(x) \qquad \forall x \in (a,b)$$

(ED) si chiama equazione differenziale nella funzione incognita $y = y(x)$.
Tale equazione é **lineare** in y, y' perché se $\quad (\mathcal{D}y)(x) := y'(x) + a(x)y(x) \quad$ allora $\mathcal{D}(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) = \alpha_1 \mathcal{D}y_1 + \alpha_2 \mathcal{D}y_2$. Si dice **del primo ordine** perché la funzione

incognita compare insieme alla sua derivata prima.
Fissato il **'punto iniziale'** $x_0 \in (a, b)$ ed il **'valore iniziale'** y_0, il problema

$$(PC) \qquad y'(x) + a(x)y(x) = b(x) \qquad \forall x \in (a, b), \qquad y(x_0) = y_0$$

consistente nel trovare una soluzione di (ED) soddisfacente la **condizione iniziale, o di Cauchy** $y(x_0) = y_0$ si chiama **problema di Cauchy** associato ad (ED).

ESEMPIO. Se $a \equiv 0$ le soluzioni dell'equazione differenziale $y' = b$ sono le primitive di b. Siccome b **é supposta continua**, le soluzioni di questa equazione sono date, per il Teorema Fondamentale del Calcolo (TFC), da

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} b(t)dt$$

ove $x_0 \in (a, b)$ é un punto fissato e y_0 é una costante arbitraria (notiamo esplicitamente che se si cambia il 'punto iniziale' x_0 la famiglia di funzioni, dipendenti dal parametro arbitrario y_0, non cambia).
Tale formula dice che, fissato il 'punto iniziale' x_0, c'é una unica soluzione dell'equzione differenziale data che prende in x_0 il valore y_0, cioé

il Problema di Cauchy associato ha una ed una sola soluzione.

Notiamo che **la continuitá di** $b(x)$ **é essenziale** per l'esistenza di una primitiva. Inoltre, condizione necessaria perché $b(x)$ ammetta primitiva é che b abbia la proprietá del valore intermedio (Teorema di Darboux).

Soluzione del Problema di Cauchy associato a (ED).

Se y é soluzione di (PC), moltiplicando (ED) per $e^{\int_{x_0}^{x} a(t)dt}$, troviamo che

$$[y'(x) + a(x)y(x)]e^{\int_{x_0}^{x} a(t)dt} = \left(y(x)e^{\int_{x_0}^{x} a(t)dt}\right)' = e^{\int_{x_0}^{x} a(t)dt}b(x)$$

e quindi, per il TFC, $\quad y(x)e^{\int_{x_0}^{x} a(t)dt} = y(x_0) + e^{\int_{x_0}^{x} a(t)dt}b(x) \quad$ e quindi

$$y(x) = e^{-\int_{x_0}^{x} a(t)dt}\left[y_0 + e^{\int_{x_0}^{x} a(t)dt}b(x)\right]$$

Tale espressione, che fornisce al variare del parametro y_0 tutte le soluzioni di (ED), si chiama **Integrale generale** di (ED).

Equazioni differenziali autonome, esistenza, unicitá, tempo di esistenza.

Sia $f \in C((a,b))$. Trovare $x = x(t)$ di classe $C^1(I)$, I intervallo opportuno, tale che

$$(EDA) \qquad \dot{x}(t) = f(x(t)) \qquad \forall t \in I$$

Tale equazione differenziale del primo ordine si chiama **autonoma** in quanto la variabile indipendente (qui indicata come t) non compare esplicitamente nell'equazione. Una particolare conseguenza di questo fatto é che se $x(t), t \in (\alpha,\beta)$ é soluzione, allora anche $x(t-t_0), t \in (\alpha+t_0, \beta+t_0)$ é soluzione. Per questa ragione la condizione di Cauchy si scrive usualmente nella forma $x(0) = x_0$ ed il Problema di Cauchy

$$(PC) \qquad\qquad x'(t) = f(x(t)), \qquad x(0) = x_0$$

ha la seguente interpretazione 'dinamica': la soluzione $x(t)$ di (PC) indica la posizione di un punto mobile (su $\mathbf{R}$) che si muove con velocitá data all'istante t da $f(x(t))$ (la velocitá dipende cioé dalla posizione al tempo t) e che si trovi al tempo 'iniziale' $t = 0$ nella posizione x_0 .

1. Esistenza e unicitá locale. Determinazione di una soluzione di (PC). Sia $f(x_0) \neq 0$, diciamo $f(x_0) > 0$. Siano $a < x_0 < b$ due (eventuali) zeri consecutivi di f, e quindi $f(x) > 0, \quad \forall x \in (a,b)$. É allora definita in (a,b) la funzione

$$F(x) := \int_{x_0}^{x} \frac{ds}{f(s)}, \quad x \in (a,b) \quad \text{e quindi} \quad F'(x) = \frac{1}{f(x)}, \quad x \in (a,b)$$

Se $x(t)$ é soluzione di (PC), allora

$$\frac{d}{dt}F(x(t)) \equiv 1 \quad \text{e quindi} \quad F(x(t)) = t \quad \text{ovvero} \quad x(t) = F^{-1}(t)), \quad t \in (F(a), F(b))$$

Siccome $\frac{d}{dt}F^{-1}(t) = \frac{1}{F'(F^{-1}(t))} = f(F^{-1}(t)) \quad \forall t \in (F(a), F(b))$ e $F^{-1}(0) = x_0$, (PC) ha una e una sola soluzione in $(F(a), F(b))$ data dalla formula $x(t) = F^{-1}(t)$.

2. Non unicitá locale . Se invece $f(x_0) = 0$ allora una soluzione é banalmente data dalla funzione costante $x(t) = x_0$ per ogni t (siccome il 'punto mobile' $x(t)$ non si muove, la posizione x_0 si dice di **equilibrio**). Tale soluzione non é peró in generale l'unica: se x_0 é uno zero isolato di f e l'integrale $\int_{x_0}^{x} \frac{ds}{f(s)}$ esiste in senso generalizzato (e questo accade se $f(x) = O(|x-x_0|^\delta)$ per un $\delta \in (0,1)$) allora la formula precedente continua a fornire una soluzione (non costante) di (PC). Ed infatti ci sono infinite soluzioni di (PC). Vediamolo con un esempio.

$$\dot{x} = x^{\frac{2}{3}}, \qquad x(0) = 0$$

ha le **infinite soluzioni** $\quad x(t) = (\frac{t-t_0}{3})^3 \chi_{[t_0,+\infty)}, \quad t_0 \geq 0.$

3. Non unicitá globale . L'esempio precedente mostra anche come, pur in presenza di una unica soluzione locale (cioé 'per tempi piccoli') l'unicitá puó venire a mancare globalmente (cioé 'per tempi grandi'). Consideriamo il problema

$$\dot{x} = x^{\frac{2}{3}}, \qquad x(0) = -1$$

Qui, con le notazioni usate al punto 1,

$$f(x) = x^{\frac{2}{3}},\ F(x) = \int_{-1}^{x} \frac{ds}{s^{\frac{2}{3}}} = 3x^{\frac{1}{3}} + 3, \quad x \in (-\infty, 0), F(-\infty) = -\infty, F(0) = 3$$

e quindi il problema dato ha ha come unica soluzione in $(-\infty, 3)$ la funzione $F^{-1}(t) = (\frac{t-3}{3})^3$. Tale soluzione puó peró essere prolungata su tutto $\mathbf{R}$ nei modi seguenti: fissato $t_0 \geq 3$,

$$x(t, t_0) := (\frac{t-3}{3})^3 \chi_{(-\infty,3)} + (\frac{t-t_0}{3})^3 \chi_{[t_0,+\infty)}$$

Una verifica diretta mostra che queste sono tutte soluzioni del problema di Cauchy dato.

4. Tempi di esistenza. Sia $f \in C(\mathbf{R}), f(x) > 0 \quad \forall x$. Il problema di Cauchy

$$x' = f(x), \quad x(0) = x_0$$

ha una ed una sola soluzione data come sopra e definita in $(-\int_{-\infty}^{x_0} \frac{ds}{f(s)}, \int_{x_0}^{\infty} \frac{ds}{f(s)})$ e quindi se $\quad \int_{-\infty}^{x_0} \frac{ds}{f(s)} = \int_{x_0}^{\infty} \frac{ds}{f(s)} = +\infty \quad$ **la soluzione é definita per tutti i tempi** e diremo che la soluzione **esiste globalmente**. Se invece uno dei due integrali coverge e quindi la soluzione non é definita per tutti i tempi si dice che la soluzione **esplode in tempo finito**. Ad esempio per le seguenti equazioni differenziali

$$(i)\ x' = e^x, \qquad (ii)\ x' = e^{-x}, \qquad (iii)\ x' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

soggette alla condizione iniziale $x(0) = 0$ si ha
(i) $F(x) = 1 - e^{-x}$ e quindi la soluzione $x(t) = -\log(1-t)$ é definita in $(-\infty, 1)$
(ii) $F(x) = e^x - 1$ e quindi la soluzione $x(t) = \log(x+1)$ é definita in $(-1, +\infty)$
(iii) $F(x) = \int_0^x \sqrt{1+s^2} ds$ e quindi la soluzione é definita per tutti i tempi (infatti $x(t) = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{1+x^2} + \log(x + \sqrt{1+x^2}\right))$.

Sia $f \in C^1(\mathbf{R})$. Se $a < b$ sono due zeri consecutivi di f e $x_0 \in (a, b)$ allora la soluzione di $x' = f(x), \quad x(0) = x_0$ é definita per tutti i tempi perché gli integrali $\int_{x_0}^{a} \frac{ds}{f(s)}$ e $\int_{x_0}^{b} \frac{ds}{f(s)}$ divergono entrambi. Ad esempio, nei seguenti problemi

$$(i) \quad x' = \frac{1}{2}(1 - x^2), \quad x(0) = 0, \qquad (ii) \quad x' = \frac{1}{2}(1 - x^2), \quad x(0) = 0$$

(i) $F(x) = \int_0^x \frac{ds}{1-s^2} = \int_0^x \frac{1}{1+s} + \frac{1}{1-s} = \log \frac{1+x}{1-x}$ e quindi $x(t) = \frac{e^t - 1}{e^t + 1}$ é definita su tutto $\mathbf{R}$

(ii) $F(x) = \int_2^x \frac{ds}{1-s^2} = \log \frac{1}{3} \frac{x+1}{x-1}$ e quindi $x(t) = \frac{3e^t + 1}{3e^t - 1}$ é definita (e decrescente) in $(-\log 3, +\infty)$.

PROBLEMA DI CAUCHY PER SISTEMI DI EDO

Sia $f \in C(O, \mathbf{R}^n)$, $x \in O \subset \mathbf{R}^n$ aperto. Trovare, se esistono, $\delta > 0$, $\gamma \in C^1((-\delta, \delta), O)$ tali che

$$\dot{\gamma}(t) = f(\gamma(t)) \quad \forall t \in (-\delta, \delta), \qquad \gamma(0) = x$$

NOMENCLATURA. L'equazione $\dot{\gamma}(t) = f(\gamma(t))$ é infatti un **sistema di n equazioni differenziali** nelle n (funzioni) incognite $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \ldots, \gamma_n(t))$. La condizione $\gamma(0) = x$ si chiama **condizione iniziale**.

La funzione data f si chiama anche **campo di vettori** in O (i vettori $f(x)$ applicati nei punti $x \in O$) e una soluzione γ si chiama anche **curva integrale** del campo passante per x (é una curva che é tangente in ogni suo punto al campo di vettori f). Al variare di x in O potrá ottenersi una famiglia di curve $\gamma^x(t)$ che si chiamerá **flusso** generato dal campo f.

Dal punto di vista dinamico, f é un **campo di velocitá** e $\gamma(t)$ é, al variare di t, la **traiettoria** di un punto mobile la cui velocitá all'istante t é data da $f(\gamma(t))$ e che si trova nell'istante iniziale $t = 0$ nella posizione iniziale x.

TEOREMA (di Picard)

Sia f Lipschitziana di costante k in O aperto di $\mathbf{R}^n$. Sia $r > 0$ tale che $\overline{B}_{2r}(x_0) \subset O$, e sia $M := \sup_{x \in \overline{B}_{2r}(x_0)} \|f(x)\|$.

Se $\delta > 0$ é tale che $\delta k < 1$, $\delta M < r$, allora

$$\forall x \in B_r(x_0) \ \exists!\, \gamma^x \in C^1((-\delta, \delta), O) : \qquad \gamma^x(0) = x, \quad \dot{\gamma}^x(t) = f(\gamma^x(t)) \quad \forall t \in (\delta, \delta)$$

NOTA. Se $x \in C([a,b], \mathbf{R}^n)$, scriveremo

$$\int_a^b x(t)dt := (\int_a^b x_1(t)dt, \ldots, \int_a^b x_n(t)dt)$$

Vale la seguente diseguaglianza: $\| \int_a^b x(t)dt\| \le \int_a^b \|x(t)\|dt.$ Infatti

$$\| \int_a^b x(t)dt\|^2 = \sum_{i=1}^n \left(\int_a^b x_i(t)dt \right) \left(\int_a^b x_i(t)dt \right) = \int_a^b \left[\sum_{i=1}^n \left(\int_a^b x_i(t)dt \right) x_i(t) \right] dt \le$$

$$\int_a^b \left[\|x(t)\| \, \| \int_a^b x(t)dt\| \right] dt = \| \int_a^b x(t)dt\| \int_a^b \|x(t)\|dt \quad \Rightarrow \quad \| \int_a^b x(t)dt\| \le \int_a^b \|x(t)\|dt$$

Prova del Teorema di Picard.

Posto $\gamma_0(t) \equiv x$ sia $\overline{B}_r(\gamma_0) := \{\gamma \in C([-\delta, \delta], \mathbf{R}^n) : \quad \|\gamma - \gamma_0\|_\infty \le r\}$

Siccome $\gamma \in \overline{B}_r(\gamma_0) \quad \Rightarrow \quad \|\gamma(t) - x\| \le r \quad \Rightarrow \quad \|\gamma(t) - x_0\| \le 2r \quad \forall t \in [-\delta, \delta]$

é allora ben definita la funzione $\qquad (T\gamma)(t) := x + \int_0^t f(\gamma(\tau))d\tau \qquad \forall \gamma \in \overline{B}_r(\gamma_0)$

Intanto, $T\gamma \in C([-\delta, \delta], \mathbf{R}^n)$ e $(T\gamma)(0) = x \quad \forall \gamma \in \overline{B}_r(\gamma_0)$. Inoltre, dalla diseguaglianza integrale in nota e dalle ipotesi, segue che

$$\gamma \in \overline{B}_r(\gamma_0) \quad \Rightarrow \quad \|T\gamma(t) - x\| = \| \int_0^t f(\gamma(\tau))d\tau\| \le \left| \int_0^t \|f(\gamma(\tau))\|d\tau \right| \le \delta M < r$$

e quindi $T(\overline{B}_r(\gamma_0)) \subset \overline{B}_r(\gamma_0)$. Infine, $\gamma, \beta \in \overline{B}_r(\gamma_0) \quad \Rightarrow$

$$\|(T\gamma - T\beta)(t)\| = \| \int_0^t [f(\gamma(\tau)) - f(\beta(\tau))] \, d\tau\| \le \left| \int_0^t \|f(\gamma(\tau)) - f(\beta(\tau))\|d\tau \right| \le k\delta < 1$$

Dunque T é una contrazione di $\overline{B}_r(\gamma_0)$ in sé e quindi, per il Teorema delle contrazioni

$$\exists\, !\gamma^x \in \overline{B}_r(\gamma_0) : \qquad T\gamma^x = \gamma^x$$

Dal Teorema Fondamentale del Calcolo: $\quad \dot{\gamma}^x(t) = f(\gamma(t)) \quad \forall t \in (-\delta, \delta).$