AM2: Tracce delle lezioni- IX Settimana

INSIEMI DI LIVELLO, MINIMI VINCOLATI PRINCIPIO DEI MOLTIPLICATORI DI LAGRANGE

Sia $g \in C^1(\mathbf{R}^2)$, $c \in \mathbf{R}$. L'insieme

$$\gamma = \gamma_c := \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : g(x,y) = c\}$$

si chiama **insieme di livello** di g. Diremo che γ é **curva cartesiana** se, localmente, é il grafico di una funzione di classe C^1 :

$\forall(\overline{x},\overline{y}) \in \gamma,\ \exists\delta,\sigma > 0$ e una funzione $\varphi \in C^1([\overline{x}-\delta,\overline{x}+\delta],[\overline{y}-\sigma,\overline{y}+\sigma])$ tale che:

$$g(x,y) = c, |x-\overline{x}| < \delta, |y-\overline{y}| < \sigma \ \Leftrightarrow\ y = \varphi(x)$$

oppure $\exists\delta,\sigma > 0$ e $\psi \in C^1([\overline{y}-\sigma,\overline{y}+\sigma])$ tale che $g(x,y) = c, |x-\overline{x}| < \delta, |y-\overline{y}| < \sigma$ se e solo se $x = \psi(y)$.

ESEMPI. Sia $g(x,y) = x^2 + y^2$. L'insieme di livello $\{g = c\}$ é curva cartesiana (infatti una circonferenza) se e solo se $c > 0$. Sia $g(x,y) = x^2 - y^2$. Allora $\{g = c\}$ é curva cartesiana (infatti una iperbole) se $c \neq 0$, ma non é curva cartesiana se $c = 0$, giacché $x^2 - y^2 = 0$ é l'insieme formato dalle due rette $y = x$ e $y = -x$, insieme che non é, attorno a $(0,0)$ grafico di una funzione.

Il Teorema del Dini assicura che $\{g = c\}$ é curva cartesiana se $\nabla g(x,y) \neq 0$ in ogni punto di $\{g = c\}$. Piú precisamente, se $g(\overline{x},\overline{y}) = c$ e $g_y(\overline{x},\overline{y}) \neq 0$ allora vicino a $(\overline{x},\overline{y})$ l'insieme $\{g = c\}$ é grafico di una funzione $y = y(x)$, mentre se $g_x(\overline{x},\overline{y}) \neq 0$ allora vicino a $(\overline{x},\overline{y})$ l'insieme $\{g = c\}$ é grafico di una funzione $x = x(y)$ e tali funzioni sono, per il teorema del Dini, di classe C^1.
Inoltre i grafici $(x,y(x))$, $(x(y),y)$ sono cammini differenziabili con vettore tangente $(1,y'(x))$ e $(x'(y),1)$ rispettivamente. Ricordando che, per il teorema del Dini, $y'(x) = -\frac{g_x(x,y(x))}{g_y(x,y(x))}$ vediamo che il vettore tangente in $(x,y(x))$ alla curva di livello é ortogonale a $(\nabla g)(x,y(x))$. Analogamente per $x = x(y)$.

Piú in generale, se $g \in C^1(\mathbf{R}^n)$, $c \in \mathbf{R}$, **l'insieme di livello** $\Sigma = \Sigma_c := \{(x_1,\ldots,x_n) \in \mathbf{R}^n : g(x_1,\ldots,x_n) = c\}$ é **ipersuperfice cartesiana** se si puó rappresentare localmente nella forma $x_j = x_j(x_1,\ldots,x_{j-1},x_{j+1},\ldots,x_n)$. Di nuovo, per il Teorema del Dini, ció é possibile se $\nabla g(x) \neq 0$ in ogni punto di $\{g = c\}$.

Siano ora $f, g \in C^1(\mathbf{R}^n)$, $\Sigma := \{g = c\}$. Supponiamo che $\underline{x} \in \Sigma = \{g = c\}$ sia un punto di minimo locale per $f_{|\Sigma}$ (**punto di minimo locale vincolato**):

$$\exists \delta > 0 : \quad f(\underline{x}) \leq f(x) \quad \forall x \in \Sigma \cap B_\delta(\underline{x})$$

Se $\nabla g(\underline{x}) \neq 0$ allora esiste $\lambda \in \mathbf{R}$, detto **moltiplicatore di Lagrange**, tale che

$$\nabla f(\underline{x}) = \lambda \nabla g(\underline{x})$$

É questo il Principio dei moltiplicatori di Lagrange. La ricerca di un minimo vincolato si puó quindi effettuare cercando le soluzioni del

sistema Lagrangiano $\qquad \nabla f(x) = \lambda \nabla g(x), \qquad g(x) = c.$

La prova del Principio dei moltiplicatori si basa sul teorema del Dini, che assicura che il **vincolo** $\Sigma := \{g = c\}$ si scrive, attorno a $\underline{x}$ nella forma (se ad esempio $\frac{\partial g}{\partial x_1}(\underline{x}) \neq 0$) $x_1 = x_1(x_2, \ldots, x_n)$ e quindi $f(\underline{x}) \leq f(x_1(x_2, \ldots, x_n), x_2, \ldots, x_n)$ se $(x_2, \ldots, x_n)$ é vicino a $(\underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_n)$, che é quindi un punto di minimo locale libero per $(x_2, \ldots, x_n) \to f(x_1(x_2, \ldots, x_n), x_2, \ldots, x_n)$. Ma allora, in $(\underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_n)$ deve risultare (essendo $x_1(\underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_n) = \underline{x}_1$):

$$0 = \frac{\partial}{\partial x_j} f(x_1(x_2, \ldots, x_n), x_2, \ldots, x_n)_{|(\underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_n)} =$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x_1}(\underline{x}) \frac{\partial x_1}{\partial x_j}(\underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_n) + \frac{\partial f}{\partial x_j}(\underline{x}), \qquad \forall \quad j = 2, \ldots, n$$

Allo stesso tempo (come asserito nel teorema del Dini), risulta

$$\forall\, j = 2, \ldots, n : \qquad 0 \equiv \frac{\partial}{\partial x_j} g(x_1(x_2, \ldots, x_n), x_2, \ldots, x_n) =$$

$$= \frac{\partial g}{\partial x_1}(x_1(x_2, \ldots, x_n), x_2, \ldots, x_n) \frac{\partial x_1}{\partial x_j}(x_2, \ldots, x_n) + \frac{\partial g}{\partial x_j}(x_1(x_2, \ldots, x_n), x_2, \ldots, x_n)$$

Da ció segue che

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(\underline{x}) = \left(\frac{\frac{\partial f}{\partial x_1}(\underline{x})}{\frac{\partial g}{\partial x_1}(\underline{x})} \right) \frac{\partial g}{\partial x_j}(\underline{x}), \quad j = 2, \ldots, n$$

Posto

$$\lambda := \left(\frac{\frac{\partial f}{\partial x_1}(\underline{x})}{\frac{\partial g}{\partial x_1}(\underline{x})} \right)$$

risulta ovviamente $\frac{\partial f}{\partial x_1}(\underline{x}) = \lambda \frac{\partial g}{\partial x_1}(\underline{x})$, che, con le precedenti relazioni, dice appunto che $\nabla f(\underline{x}) = \lambda \nabla g(\underline{x})$.

SPAZI METRICI ED IL TEOREMA DELLE CONTRAZIONI

La dimostrazione del teorema del Dini (per sistemi) si basa sul un principio generale, detto delle contrazioni, che conviene formulare nell' ambito degli spazi metrici.

Definizione di SPAZIO METRICO

Dato un insieme X, si dice **metrica, o distanza** su X una qualsiasi funzione

$$d : X \times X \to \mathbf{R} \qquad \text{tale che}$$

(i) $d(x,y) \geq 0 \quad \forall x, y \in X \quad$ e $\quad d(x,y) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = y$

(ii) $d(x,y) = d(y,x) \quad \forall x, y \in X$

(iii) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z) \quad \forall x, y, z \in X \quad$ (**diseguaglianza triangolare**)

La coppia (X, d) si chiama spazio metrico. Se $A \subset X$, $d_{|_A}$ é metrica (indotta) su A.

Definizione di SPAZIO NORMATO

Sia V spazio vettoriale (su $\mathbf{R}$), $p : V \to \mathbf{R}$ tale che

(i) $p(x) \geq 0 \quad \forall x \in V \qquad$ e $\qquad p(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

(ii) $p(tx) = |t|p(x) \quad \forall t \in \mathbf{R}$, $\forall x \in V \quad$ e

(iii) $p(x+y) \leq p(x) + p(y) \quad \forall x, y \in V \qquad$ **diseguaglianza triangolare**

Diremo che p é una norma su V e che $(V, p(.))$ é spazio normato. Se non ingenera confusione, scriveremo $\|x\| := p(x)$. Posto $d(x,y) := \|x - y\|$, d é una metrica: ogni spazio normato é in particolare uno spazio metrico.

ESEMPI. Su $\mathbf{R}^n$ si possono definire diverse norme (e corrispondenti metriche):
Se $p \geq 1$, $\quad \|x\|_p = (\sum_{i=1}^n |x_i|^p)^{\frac{1}{p}} \quad$ é una norma (la norma euclidea se $p = 2$)
$\|x\|_\infty := \max\{|x_i| : \quad i = 1, \ldots, n\} \quad$ é un'altra norma su $\mathbf{R}^n$.

Spazi di successioni. $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ (o $\mathbf{R}^\infty$) indica lo spazio vettoriale delle funzioni di $\mathbf{N}$ in $\mathbf{R}$ (ovvero lo spazio di tutte le successioni di numeri reali). Due importanti sottospazi lineari di $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ sono i seguenti:

$l^\infty := \{x : \mathbf{N} \to \mathbf{R} |\ \sup_{n\in\mathbf{N}} |x(n)| < +\infty\}$ é il sottospazio (lineare) di $\mathbf{R}^\mathbf{N}$ formato dalle **successioni limitate**. Una norma su l^∞ é data da

$$\|x\|_\infty := \sup_{\mathbf{N}} |x(n)|$$

$l^p := \{x : \mathbf{N} \to \mathbf{R} |\ \sum_{n=1}^{\infty} |x(n)|^p < +\infty\}$ é, se $p \geq 1$, il sottospazio (lineare) di l^∞ delle **successioni di potenza p-esima sommabile**. Una norma su l^p é data da

$$\|x\|_p := \left[\sum_{n=1}^{\infty} |x(n)|^p\right]^{\frac{1}{p}}$$

Per vedere che $\|.\|_p$ é effettivamente una norma basta verificare la diseguaglianza triangolare. Intanto, vale la **diseguaglianza di Holder**: se $p, q > 1, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$ allora

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x(n)\ |y(n)| \leq \left[\sum_{n=1}^{\infty} |x(n)|^p\right]^{\frac{1}{p}} \left[\sum_{n=1}^{\infty} |y(n)|^q\right]^{\frac{1}{q}} \quad \forall\, x \in l^p,\ y \in l^q$$

Infatti, da $\frac{|x(n)|}{\|x\|_p} \frac{|y(n)|}{\|y\|_q} \leq \frac{1}{p} \frac{|x(n)|^p}{\|x\|_p^p} + \frac{1}{q} \frac{|y(n)|^q}{\|y\|_q^q} \quad \forall\, n \in \mathbf{N}$ segue

$$\frac{\sum_{n=1}^{\infty} |x(n)\ |y(n)|}{\|x\|_p\ \|y\|_q} \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

Siccome $q = \frac{p}{p-1}$, da Holder deduciamo che

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x(n) + y(n)|^p \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x(n) + y(n)|^{p-1} |x(n)|\right) + \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x(n) + y(n)|^{p-1} |y(n)|\right) \leq$$

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} |x(n) + y(n)|^p\right)^{\frac{p-1}{p}} \|x\|_p + \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x(n) + y(n)|^p\right)^{\frac{p-1}{p}} \|y\|_p$$

e quindi

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} |x(n) + y(n)|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x(n)|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{n=1}^{\infty} |y(n)|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

cioé la diseguaglianza triangolare, qui anche detta **diseguaglianza di Minkowskii**.

Lo spazio delle funzioni continue. Sia $K \subset \mathbf{R}^n$ compatto. Sia $V = C(K, \mathbf{R}^m)$ lo spazio (vettoriale) delle funzioni continue su K e a valori in $\mathbf{R}^m$. Allora

$$\|f\|_\infty := \max_K |f| \qquad \text{é una norma su} \quad C(K, \mathbf{R}^m)$$

Aperti, chiusi, convergenza, continuitá in spazi metrici

Sia (X, d) spazio metrico.

-Fissati $x_0 \in X$ ed un numero positivo r, si chiama **palla** aperta di centro x_0 e raggio r l'insieme

$$B_r(x_0) := \{x \in X : \quad d(x, x_0) < r\}$$

-Un sottoinsieme O di X si dice **aperto** se per ogni $x \in O$ esiste $r > 0$ tale che $B_r(x) \subset O$. Ad esempio, ogni palla (aperta) é un insieme aperto.

- Un sottinsieme C di X si dice **chiuso** se il suo complementare é aperto.

- Si vede che l'unione di aperti é un aperto e che l'intersezione di chiusi é un chiuso. In particolare, $\overline{A} := \cap_{A\subset C,\ C\ chiuso} C$ é il piú piccolo chiuso contenente A. $\overline{A}$ si chiama **chiusura di** A.

-Una **successione** $x_n \in X$ **converge a** $x \in X$ $(x_n \to_n x)$ se $d(x_n, x) \to_n 0$, ovvero se, per ogni fissato $r > 0$, si ha che $x_n \in B_r(x)$ definitivamente.

-**Unicitá del limite**: chiaramente, $x_n \to_n x, \quad x_n \to_n y \quad \Rightarrow \quad x = y.$

-**Una caratterizzazione dei chiusi** : come negli spazi euclidei, si vede che

$$C \subset X \quad \text{é chiuso} \quad \Leftrightarrow \quad (x_n \in C, \quad x_n \to_n x \quad \Rightarrow \quad x \in C) \quad \Leftrightarrow \quad C = \overline{C}.$$

ESEMPI. La chiusura di l^1 in l^∞ é $c_0 := \{x \in l^\infty | \quad x(n) \to_n 0\}$. Infatti c_0 é chiuso perché se $x_j \in c_0$ e $\|x_j - x\|_\infty \to_j 0$ ovvero $\sup_n |x_j(n) - x(n)| \leq \epsilon$ per $j \geq j_\epsilon$ allora $|x(n)| \leq |x(n) - x_{j_\epsilon}(n)| + |x_{j_\epsilon}(n)| \leq \epsilon + |x_{j_\epsilon}(n)| \leq 2\epsilon$ se n é tale che $|x_{j_\epsilon}(n)| \leq \epsilon$ ovvero per tutti gli n abbastanza grandi e quindi $x \in c_0$. Ma se $x \in c_0$ e $x_j(n) := x(n)$ se $n \leq j$ e $x_j(n) = 0$ se $n > j$, allora $\|x - x_j\|_\infty = \sup_{n>j} |x(n)| \to_j 0$.

In uno spazio normato $x_n \to_n x \Leftrightarrow \|x_n - x\| \to_n 0$ e si hanno le proprietá (di compatibilitá)

$$x_n \to_n x, \quad y_n \to_n y, t_n, s_n \in \mathbf{R}, t_n \to_n t, s_n \to_n s \quad \Rightarrow \quad t_n x_n + s_n y_n \to_n tx + sy$$

CONTINUITÁ Se $(X, d), (Y, \rho)$ sono spazi metrici e $f : X \to Y$, f si dice **continua** in x se $\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0$ tale che $f(B_\delta(x)) \subset B_\epsilon(f(x))$; f é continua in X se é continua in ogni punto.

Come per le funzioni di variabile reale, si vede subito che

$$f \quad \text{é continua in} \quad x \quad \text{se e solo se} \quad x_n \to_n x \Rightarrow f(x_n) \to f(x).$$

Una importante classe di funzioni continue é quella delle **funzioni Lipschitziane**: $f : A \subset X \to Y$ é Lip se esiste $L > 0$ tale che $\rho(f(x), f(y)) \leq Ld(x, y) \quad \forall x, y \in A$.

ESEMPI. 1. Fissato $x_0 \in X$ spazio metrico, la funzione 'distanza da x_0',

$$d_{x_0} : X \to \mathbf{R}, \qquad d_{x_0}(x) := d(x, x_0)$$

é Lipschitziana (e quindi continua) perché
$d(x, x_0) \leq d(x, y) + d(x_0, y), \qquad d(y, x_0) \leq d(x, y) + d(x, x_0) \qquad \Rightarrow$

$$|d(x, x_0) - d(y, x_0)| \leq d(x, y)$$

In particolare ció implica che $\overline{B}_r(x_0) := \{x \in X : \quad d_{x_0}(x) = d(x, x_0) \leq r\}$ ('palla chiusa' di centro x_0 e raggio $r > 0$) é un insieme chiuso, grazie alla seguente proprietá: se X, Y sono spazi metrici e $f : X \to Y$ é continua , allora

$O \subset Y$ **aperto,** $F \subset Y$ **chiuso** $\Rightarrow f^{-1}(O)$ **é aperto e** $f^{-1}(F)$ **é chiuso**

Infatti $x_n \in f^{-1}(F), x_n \to_n x \Rightarrow f(x_n) \in F$ e $f(x_n) \to_n f(x) \Rightarrow x \in f^{-1}(F)$ cioé $f^{-1}(F)$ é chiuso. L'altra affermazione segue dal fatto che $[f^{-1}(O)]^c = f^{-1}(O^c)$.

2. Osserviamo che, se $E = C([a, b], \mathbf{R})$ dotato dell norma $\|f\|_\infty = \sup\limits_{x \in [a,b])} |f(x)|$ allora $f_n \to f$ in E significa che f_n converge uniformemente ad f in $[a, b]$ (la norma $\|.\|_\infty$ si chiama per questo anche norma della convergenza uniforme). Ne deriva che la funzione (lineare in $f \in C([a, b])$)

$$l(f) := \int_a^b f(x)dx$$

é definita su E ed é continua da E ad $\mathbf{R}$.

3. Sia $k \in C([a, b] \times [c, d])$. Per ogni $f \in c([a, b])$ la funzione

$$(Tf)(t) := \int_a^b k(x, t)f(x)dx$$

é, in virtú del teorema sugli integrali dipendenti da parametro, una funzione continua in $[c, d]$. Inoltre

$$\|Tf - Tg\|_\infty = \sup_{x \in [a,b])} |\int_a^b k(x, t)[f(x) - g(x)]dx| \leq \left(\sup_{(x,t) \in [a,b] \times [c,d])} |k(x, t)| \right) \|f - g\|_\infty$$

Dunque T é una funzione (lineare) e Lipschitziana (e quindi continua) da $C([a, b], \mathbf{R})$ a $C([c, d], \mathbf{R})$ dotati della norma della convergenza uniforme.

OSSERVAZIONE. Date due qualsiasi norme p_1, p_2 su $\mathbf{R}^n$, queste sono tra loro equivalenti, nel senso che

$$p_1(x_k) \to_k 0 \quad \Leftrightarrow \quad p_2(x_k) \to_k 0$$

Possiamo supporre : $p_2 = \|.\|_2$ (norma euclidea) e scriviamo $p := p_1$. Indicata con e_i la base canonica di $\mathbf{R}^n$, si ha $x = \sum_{i=1}^n < x, e_i > e_i \quad \forall x \in \mathbf{R}^n$ ($< .,. >$ denota l'usuale prodotto scalare). Intanto $\|x_k\|_2 \to 0 \quad \Rightarrow$

$$< x_k, e_i > \to_k 0 \quad \forall i \quad \Rightarrow \quad p(x_k) = p(\sum_{i=1}^n < x, e_i > e_i) \leq \sum_{i=1}^n | < x_k, e_i > | p(e_i) \to_k 0$$

In particolare, p é continua su $(\mathbf{R}^n, \|.\|_2)$. Per il Teorema di Weierstrass, p ha minimo su $\{\|x\|_2 = 1\}$ e quindi $m := \inf_{\{\|x\|_2=1\}} > 0$ e quindi $p(x) = \|x\|_2 p(\frac{x}{\|x\|_2}) \geq m\|x\|_2$ e quindi $p(x_k) \to_k 0 \quad \Rightarrow \quad \|x_k\|_2 \to 0$.

Spazi metrici completi, Spazi di Banach

Una **successione** x_n in uno spazio metrico (X, d) si dice **di Cauchy** se

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists n_\epsilon : \qquad d(x_n, x_m) \leq \epsilon \quad \forall n, m \geq n_\epsilon$$

(X, d) si dice **completo** se ogni successione di Cauchy in X é convergente in X.

$(V, \|.\|)$ si dice di **Banach** se, come spazio metrico, é completo:
$x_n \in V$, $\|x_n - x_m\| \leq \epsilon$ per n, m grandi $\Rightarrow$ $\exists x \in V :$ $\|x_n - x\| \to_n 0$.

ESEMPI. 1. $\mathbf{R}^n$, munito di una qualsiasi norma, é un Banach.
2. Un sottoinsieme chiuso di uno spazio metrico completo é completo (per la metrica indotta).
3. Lo spazio dei 'cammini continui' $E := C([a, b], \mathbf{R}^m\}$ munito della norma della convergenza uniforme $\|\gamma\|_\infty := \max_{[a,b]} \|\gamma(t)\|$ ove $\|\gamma(t)\|^2 = \sum_{i=1}^m |\gamma_i(t)|^2$ é spazio di Banach.
Basta mostrare che $V := C([a, b], \mathbf{R})$ munito della norma $\|.\|_\infty$ é un Banach. Infatti,

$f_n, f \in V$, $\|f_n - f\|_\infty \to_n 0 \quad \Leftrightarrow \quad f_n$ converge uniformemente in $[a, b]$ ad f,
f_n é di Cauchy in $(V, \|.\|_\infty) \quad \Leftrightarrow \quad f_n$ é Cauchy uniforme.

Dall'essere Cauchy uniforme segue, come noto, che $f(x) := \lim_n f_n(x)$ esiste per ogni x e la convergenza é uniforme e quindi f é continua, e cioé appartiene a V.