AM2: Tracce delle lezioni- Settimana VIII

FUNZIONI A VALORI VETTORIALI

Sia $A \subset \mathbf{R}^n$ e siano $f_i : A \to \mathbf{R}, \quad i = 1, \ldots, m$. Diremo che

$$f(x) = (f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_m(x_1, \ldots, x_n)) , \quad x = (x_1, \ldots, x_n) \in A$$

é funzione di n variabili a valori in $\mathbf{R}^m$. Diremo che f é **continua** in $\overline{x} = (\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n)$

se $\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta_\epsilon > 0 : \quad x \in A, \|x - \overline{x}\| \le \delta_\epsilon \quad \Rightarrow \quad \|f(x) - f(\overline{x})\| \le \epsilon$. Siccome

$\|f(x) - f(\overline{x})\| \ge |f_i(x) - f_i(\overline{x})| \quad \forall i$ e $|f_i(x) - f(\overline{x})|^2 \le \frac{\epsilon^2}{m} \quad \Rightarrow \quad \|f(x) - f(\overline{x})\| \le \epsilon$,

si ha che **f é continua se e solo se f_i sono continue**.

In particolare, f é continua in x se e solo se $x_j \to_{j \to +\infty} x \Rightarrow f_i(x_j) \to_{j \to +\infty} f_i(x) \quad \forall i$.

$f \in C(A)$ se f é continua in ogni punto di A. Ricordiamo che, se $K \subset \mathbf{R}^n$ é **compatto**, allora

$$f \in C(K) \quad \Rightarrow \quad f(K) \quad \textbf{é compatto in } \mathbf{R}^m$$

$$f \in C(K) \quad \Rightarrow \quad \forall \epsilon, \exists \delta : \quad x, y \in K, \ \|x - y\| \le \delta \quad \Rightarrow \quad \|f(x) - f(y)\| \le \epsilon$$

Il primo risultato é la versione vettoriale del **Teorema di Weierstrass**, mentre il secondo é il **Teorema di Heine-Cantor** e la proprietá indicata é l'**uniforme continuitá** per funzioni vettoriali. Una importante classe di funzioni uniformemente continue é data dalle **funzioni Lipschitziane**

$$f \in Lip(A) \quad \text{se} \quad \exists L > 0 : \quad \|f(x) - f(y)\| \le L\|x - y\| \quad \forall \, x, y \in A$$

ESEMPIO Se $\mathcal{A} = (a_{ij})_{i=1,\ldots,m; \quad j=1,\ldots,n}$ é matrice di m righe ed n colonne, l'operazione di moltiplicazione righe per colonne

$$\mathcal{A} \ h = \left(\sum_{j=1}^n a_{1j} h_j, \ldots, \sum_{j=1}^n a_{mj} h_j \right), \qquad h = (h_1, \ldots, h_n) \in \mathbf{R}^n$$

definisce una **trasformazione lineare** di $\mathbf{R}^n$ in $\mathbf{R}^m$. Questo é un esempio di funzione Lipschitziana: $\|\mathcal{A} \ h - \mathcal{A} \ k\|^2 = \|\mathcal{A} \ (h - k)\|^2 \le$

$$\sum_i \left(\sum_j a_{ij}(h_j - k_j) \right)^2 \le \sum_i \left(\sum_j a_{ij}^2 \right) \left(\sum_j (h_j - k_j)^2 \right) = \left(\sum_{ij} a_{ij}^2 \right) \|h - k\|^2$$

MATRICE JACOBIANA, DIFFERENZIABILITÁ

Se O é aperto in $\mathbf{R}^n$, diremo che $\quad f \in C^1(O,\mathbf{R}^m) \quad$ se $f_i \in C^1(O,\mathbf{R})$, $\quad \forall i$. La matrice di m righe ed n colonne

$$J_f(x) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)\right)_{i=1,\ldots,m; \quad j=1,\ldots,n}$$

avente come i-esimo vettore riga ∇f_i e come j-esimo vettore colonna $\frac{\partial f}{\partial x_j} = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)_{i=1,\ldots,m}$ si chiama **matrice Jacobiana** di f in x.

ESEMPIO. Se $f \in C^2(O,\mathbf{R})$, allora $J_{\nabla f}(x) = H_f(x)$.

La trasformazione lineare di $\mathbf{R}^n$ in $\mathbf{R}^m$ associata alla matrice Jacobiana,

$$J_f(x)h \;:=\; (<\nabla f_1(x), h>, \ldots, <\nabla f_m(x), h>)\,, \qquad h \in \mathbf{R}^n$$

si chiama **differenziale** in x di f e si indica $df(x)$.

Proposizione 1. Sia $f \in C^1(O,\mathbf{R}^m)$. Allora f **é differenziabile**, ovvero

$$\frac{\|f(x+h) - f(x) - J_f(x)h\|}{\|h\|} \to_{\|h\|\to 0} 0 \quad \text{ovvero} \quad f(x+h) = f(x) + J_f(x)h + \circ(\|h\|)$$

Infatti, dalla differenziabilitá delle f_i, segue $\quad f(x+h) - f(x) - J_f(x)h =$

$$(f_i(x+h) - f_i(x) - <\nabla f_i(x), h>)_{i=1,\ldots,m} = (\circ_i(\|h\|))_{i=1,\ldots,m} = \circ(\|h\|)$$

Proposizione 2. $f \in C^1(O,\mathbf{R}^m) \;\Rightarrow\; f$ é **localmente Lipschitziana** in O,

ovvero se $\overline{B}_r(x_0) := \{x : \|x - x_0\| \le r\} \subset O$, allora

$$\exists L = L(x_0, r): \qquad \|f(x) - f(y)\| \le L\|x - y\| \qquad \forall \quad x, y \in \overline{B}_r(x_0)$$

Basta infatti ricordare che

$$|f_i(x) - f_i(y)| \le [\sup_{z \in B_r(x_0)} \|\nabla f_i(z)\|] \quad \|x - y\| \qquad \forall \quad x, y \in \overline{B}_r(x_0)$$

per concludere che, presi x, y in $\overline{B}_r(x_0)$, risulta

$$\|f(x) - f(y)\|^2 = \sum_{i=1}^m |f_i(x) - f_i(y)|^2 \le \quad \|x - y\|^2 \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \left[\sup_{z \in B_r(x_0)} \left|\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(z)\right|\right]^2$$

REGOLA DELLA CATENA

Siano $f \in C^1(O, \mathbf{R}^m)$, $g \in C^1(\mathbf{R}^m, \mathbf{R}^p)$. Allora $g \circ f$ é $C^1(O, \mathbf{R}^p)$ e

$$J_{g\circ f}(x) \quad = \quad J_g(f(x))J_f(x)$$

Infatti, ricordando la formula di derivazione lungo un cammino (qui, avendo fissato $\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_{j-1}, \overline{x}_{j+1}, \ldots, \overline{x}_n$, il cammino sará $x_j \to f(\overline{x}_1, \ldots, x_j, \ldots \overline{x}_n))$, vediamo che l'elemento di posto ij in $J_{g\circ f}(\overline{x})$ é dato da

$$\frac{\partial (g_i \circ f)}{\partial x_j}(\overline{x}) = < \nabla g_i(f(\overline{x})), \frac{\partial f}{\partial x_j}(\overline{x}) > = \sum_{l=1}^{m} \frac{\partial g_i}{\partial y_l}(f(\overline{x}))\frac{\partial f_l}{\partial x_j}(\overline{x})$$

cioé dall'elemento di posto ij della matrice (prodotto righe per colonne) $J_g(f(\overline{x}))J_f(\overline{x})$.

FUNZIONI IMPLICITE E TEOREMA DEL DINI

PROBLEMA. Sia $f = f(t, x)$ continua in $[t_0 - \delta, t_0 + \delta] \times [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$. Sia $f(t_0, x_0) = 0$. Descrivere gli zeri, vicini a x_0, della funzione $f^t : x \to f(t, x)$ per valori del parametro t vicini a t_0.

Non si puó dare in generale una risposta precisa. Esempi (ove $t_0 = x_0 = 0$):
-Sia $f(t, x) = t^2 + x^2$. É $f^t(x) \geq t^2 > 0$ se $t \neq 0$ e quindi f^t **non ha zeri**
-Sia $f(t, x) = t^2 - x^2$. In tal caso $f^t(x)$ **ha due zeri** $x = \pm|t|$ vicini a zero se t é vicino a zero
-Sia $f(t, x) = x^3 + x^2 + t^2$. É $f^t(x) = 0 \Rightarrow x^3 < -x^2 \Rightarrow x < -1$ se $t \neq 0$ e quindi f^t **non ha zeri** vicini a $x_0 = 0$
-Sia $f(t, x) = x^3 - tx$. In tal caso $f^t(x)$ **ha tre zeri,** $x = 0, x = \pm|t|$**, se** $t > 0$ **e un solo zero se** $t < 0$.

In tutti questi esempi c'e un fatto comune: f^t é derivabile e $\frac{d}{dx}f(0, x)$ si annulla in $x = 0$. Vediamo cosa si puó dire se $f(t_0, x_0) = 0$ e $\frac{d}{dx}f(t_0, x)_{|x=x_0} \neq 0$.

In tal caso $f(t_0, x_0 - \epsilon)f(t_0, x_0 + \epsilon) < 0$ se $\epsilon > 0$ é piccolo . Ora, la continuitá di f assicura che f^t **é 'uniformemente vicina a** f^0 (in altre parole, $t_n \to 0 \Rightarrow f^{t_n} \to f^0$ uniformemente). Quindi $f(t, x_0 - \epsilon)f(t, x_0 + \epsilon) < 0$ se t é piccolo, e quindi $f^t(x)$ si annulla vicino a x_0 se t é vicino a t_0 .
Osserviamo che l'ipotesi $f_x(t_0, x_0)$ assicura anche che x_0 é uno zero isolato (e semplice) di $x \to f(t_0, x)$ e ci chiediamo se anche f^t ha un'unico zero vicino a x_0 per t vicino a t_0. Questo non é vero, in generale. Esempio:

$f(t,x) = x - 2\frac{t^2 x}{t^2+x^2}$ se $x^2+t^2>0$, $f(0,0)=0$; f é continua, f^t é derivabile e $f_x(0,0)=1$ e, per $t \neq 0$, f^t ha **tre zeri**, $x=0$ e $x=\pm|t|$, tutti e tre vicini a zero se t é vicino a zero.

Di ció é responsabile il fatto che $\frac{d}{dx} f^t = 1 - \frac{2t^2(t^2-x^2)}{(t^2+x^2)^2}$ **non é uniformemente vicina a** $\frac{d}{dx} f^0 \equiv 1$ (infatti, $t_n \to 0 \Rightarrow \frac{d}{dx} f^{t_n}(x) \to 1$ se $x \neq 0$ e $\frac{d}{dx} f^{t_n}(0) \to -1$).
É infatti vero che se $f \in C^1$, $f(t_0,x_0)=0$ e $f_x(t_0,x_0) \neq 0$ allora esiste $\delta > 0$ tale che per ogni $t \in [t_0-\delta, t_0+\delta]$ esiste, in $[x_0-\delta, x_0+\delta]$ esattamente uno zero $x(t)$ di f^t e tale zero dipende in modo C^1 dal parametro t. In particolare,

$$0 \equiv \frac{d}{d} f(t,x(t)) = f_t(t,x(t)) + f_x(t,x(t))x'(t) \Rightarrow x'(t) = -[f_x(t_0,x_0))]^{-1} f_t(t_0,x_0)$$

Formuliamo tale teorema (**Teorema del Dini**) in una forma piú generale.

Date n funzioni $f_i, i=1,\ldots,n$ nelle $m+n$ variabili $(t_1,\ldots,t_m,x_1,\ldots,x_n)$ tali che $f_i(0,\ldots,0)=0 \forall i$, ci proponiamo di descrivere **l'insieme delle soluzioni del sistema di n equazioni nelle $m+n$ incognite** t_j, x_i,

$$f_i(t_1,\ldots,t_m,x_1,\ldots,x_n) = 0 \qquad \forall\, i=1,\ldots,n$$

vicine alla soluzione nulla $x_i \equiv 0 \equiv t_j$. In forma vettoriale, il sistema si scrive

$$f(t,x)=0$$

ove $f=(f_1,\ldots,f_n)$ $x=(x_1,\ldots,x_n)$, $t=(t_1,\ldots,t_m)$.

Nel seguito denoteremo con $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x}(t,x)$ la matrice $n \times n$ di elementi $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$.
Posto $R_{\delta,\sigma} := B_\delta \times B_\sigma = \{(t,x) \in \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^n : \|t\| \leq \delta,\ \|x\| \leq \sigma\}$ si ha che:

Se f é di classe C^1 e $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ é invertibile, ovvero $\det\left[\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\right] \neq 0$, allora esistono $\delta > 0$, $\sigma > 0$ ed una funzione $\varphi \in C^1(B_\delta, B_\sigma)$ tali che

$$f(t,x)=0, \quad (t,x) \in R_{\delta,\sigma} \qquad \Leftrightarrow \qquad x=\varphi(t)$$

cioé l'insieme degli zeri di f é, localmente, il grafico di una funzione di classe C^1 nella variabile t, cioé x puó essere esplicitata in funzione di t. Inoltre

$$J_\varphi(t) = -\left(\frac{\partial f}{\partial x}(t,\varphi(t))\right)^{-1} \frac{\partial f}{\partial t}(t,\varphi(t))$$