

AM2: Tracce delle lezioni- VI Settimana

Elementi di topologia di \mathbf{R}^n .

Nel seguito D_r indica una palla (o disco) chiusa in \mathbf{R}^n .

1. $O_\alpha, \alpha \in \mathcal{A}$ aperti $\Rightarrow \bigcup_\alpha O_\alpha$ é aperto,
 $F_\alpha, \alpha \in \mathcal{A}$ chiusi $\Rightarrow \bigcap_\alpha F_\alpha$ é chiuso. Infatti

$$u \in \bigcup_\alpha O_\alpha \Rightarrow \exists \alpha : u \in O_\alpha \Rightarrow \exists D_r(u) \subset O_\alpha \subset \bigcup_\alpha O_\alpha, \quad \left(\bigcap_\alpha F_\alpha\right)' = \bigcup_\alpha F_\alpha'$$

2. **Definizioni** Sia $A \subset \mathbf{R}^n$.

L' **interno** di A é l'insieme dei punti interni ad A : $\text{int}A := \{u \in A : \exists D_r(u) \subset A\}$

La **frontiera** di A é l'insieme dei punti che non sono né interni né esterni ad A :
 $\partial A = \{u : D_r(u) \cap A \neq \emptyset \neq D_r(u) \cap A' \forall r > 0\} = \partial(A')$

La **chiusura** di A é l'insieme formato dai punti di A e dai punti frontiera di A :
 $\bar{A} := A \cup \partial A$

3. \bar{A} é un insieme chiuso. Infatti, se $x \notin \bar{A}$, allora $x \notin A$ e $x \notin \partial A = \partial(A')$ e quindi x é interno ad $(\bar{A})'$ che é quindi aperto. Quindi \bar{A} é chiuso.

4. $u \in \bar{A} \Leftrightarrow \exists u_n \in A : u_n \rightarrow u$. Infatti, $u \in \bar{A} \Rightarrow D_r(u) \cap A \neq \emptyset \forall r > 0$. Si puó quindi costruire (prendendo $r = \frac{1}{n}$), $u_n \in A : u_n \rightarrow u$. Il viceversa segue dal fatto che \bar{A} é chiuso.

5. $\bar{A} = \bigcap_{F: A \subset F, F \text{ chiuso}} F$, cioè é il piú piccolo chiuso contenente A . Infatti, siccome \bar{A} é chiuso, é $\bigcap_{F: A \subset F, F \text{ chiuso}} F \subset \bar{A}$. L'inclusione opposta segue dal fatto che F chiuso, $A \subset F \Rightarrow \bar{A} \subset F$.

Chiaramente, F é chiuso $\Leftrightarrow F = \bar{F}$.

6. Siano O aperto, $x, y \in C([0, 1])$ tali che $(x(0), y(0)) \in O$, $(x(1), y(1)) \in \bar{O}'$.

Provare che $\exists t \in [0, 1] : (x(t), y(t)) \in \partial O$.

$f(x, y) \equiv 1$ in O , $f(x, y) \equiv 0$ in O' é continua in $O \cup \bar{O}'$ e quindi, se fosse $\gamma(t) := (x(t), y(t)) \in O \cup \bar{O}' \forall t \in [0, 1]$, sarebbe $[0, 1] \subset (f \circ \gamma)([0, 1])$.

FUNZIONI A VALORI VETTORIALI

Sia $A \subset \mathbf{R}^n$. Una funzione $f : A \rightarrow \mathbf{R}^m$ si chiama funzione vettoriale o a valori vettoriali.

Se $f(x_1, \dots, x_n) = (f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n))$, le f_j si chiamano le (funzioni) componenti di f .

Se $n = 1$ f si dice anche curva parametrica o cammino in \mathbf{R}^m .

Esempio. $f(t) = (\cos t, \sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$ (circonferenza unitaria in forma parametrica)

Definizione. $f : A \rightarrow \mathbf{R}^m$ é continua in $x_0 \in A$ se

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta_\epsilon > 0 : x \in A, \|x - x_0\| \leq \delta_\epsilon \Rightarrow \|f(x) - f(x_0)\| \leq \epsilon$$

Chiaramente

- (i) $f = (f_1, \dots, f_m)$ é continua in x_0 se e solo se le f_j sono continue in x_0
- (ii) f é continua in x_0 se e solo se $x_k \in A, x_k \rightarrow_k x_0 \Rightarrow f(x_k) \rightarrow_k f(x_0)$.

f si dice continua in A , e scriveremo $f \in C(A)$ se f é continua in ogni punto di A .

TEOREMA Sia $f : K \rightarrow \mathbf{R}^m$, $K \subset \mathbf{R}^n$ compatto, f continua in K . Allora $f(K)$ é compatto.

Prova. Sia $y_j = f(x_j), x_j \in K, j \in \mathbf{N}$. Siccome K é compatto, esiste una estratta x_{j_k} e $x \in K$, tale che $x_{j_k} \rightarrow_k x$. Siccome f é continua, $y_{j_k} = f(x_{j_k}) \rightarrow_k f(x)$. Dunque $f(K)$ é compatto.

Nel caso $m = 1$ il teorema precedente dice che $\sup f(K)$ e $\inf f(K)$ sono finiti ed appartengono a $f(K)$. Si ha quindi

TEOREMA DI WEIERSTRASS

Sia $f \in C(K)$, $K \subset \mathbf{R}^n$ compatto.

Allora, $\exists \underline{u}, \bar{u} \in K : -\infty < \inf_K f = f(\underline{u}), f(\bar{u}) = \sup_K f < +\infty$

Diamo una dimostrazione diretta. Sia $u_n \in K : f(u_n) \rightarrow_n \inf_K f$ (successione minimizzante). Possiamo supporre, passando eventualmente ad una sottosuccessione, che $u_n \rightarrow u$ per un $u \in K$. Da $f(u_n) \rightarrow f(u)$ segue che $\inf_K f = f(u) > -\infty$.

Variante di Weierstrass Sia $F \subset \mathbf{R}^n$ chiuso. Sia $f \in C(F)$ tale che

- (i) **(coercivita)** $u_n \in C, \|u_n\| \rightarrow_n +\infty \Rightarrow f(u_n) \rightarrow_n +\infty$
- (ii) **(semicontinuita inferiore)** $u_n \in C, u_n \rightarrow u \Rightarrow \liminf_n f(u_n) \geq f(u)$.

Allora $\exists \underline{u} \in C : f(\underline{u}) = \inf_C f$.

Infatti, se $u_n \in C, f(u_n) \rightarrow_n \inf_C f$, allora u_n e limitata in virta della coercivita, e quindi si puo supporre, passando eventualmente ad una sottosuccessione, che u_n converga a qualche $u \in C$ (perche C e chiuso). Da (ii) segue $\inf_C f = \liminf_n f(u_n) \geq f(u)$.

UNIFORME CONTINUITA

$f : A \rightarrow \mathbf{R}^m$ e **uniformemente continua** in $A \subset \mathbf{R}^n$ sse

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta_\epsilon > 0 : (u, v \in K, \|u - v\| \leq \delta_\epsilon \Rightarrow \|f(u) - f(v)\| \leq \epsilon)$$

(TEOREMA DI HEINE-CANTOR)

$f \in C(K), K \subset \mathbf{R}^n$ compatto $\Rightarrow f$ e uniformemente continua in K .

Prova. Se no, $\exists \epsilon_0 > 0, u_n, v_n \in K, \|u_n - v_n\| \leq \frac{1}{n} : \|f(u_n) - f(v_n)\| \geq \epsilon_0$. Passando eventualmente a sottosuccessioni, possiamo supporre che $u_n \rightarrow u, v_n \rightarrow v$ per certi $u, v \in K$. Per continuita: $\|f(u) - f(v)\| \geq \epsilon_0$. Ma $\|u - v\| \leq \|u - u_n\| + \|u_n - v_n\| + \|v_n - v\| \forall n \Rightarrow u = v$, contraddizione.

CONNESSIONE

$A \subset \mathbf{R}^n$ e **connesso per archi** se $\forall u, v \in A$, esiste un **cammino continuo** $\gamma(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t)), x_j \in C([0, 1])$:

$$\gamma(t) \in A \forall t \in [0, 1], \gamma(0) = (x_1(0), \dots, x_n(0)) = u, \gamma(1) = (x_1(1), \dots, x_n(1)) = v$$

Teorema del valore intermedio. Sia $A \subset \mathbf{R}^n$ connesso per archi. Allora

$f : A \rightarrow \mathbf{R}, f \in C(A) \Rightarrow f(A)$ e un intervallo.

Prova. Sia $a = f(u), b = f(v), u, v \in A$. Siano $x_j \in C([0, 1]) : \gamma(t) := (x_1(t), \dots, x_n(t)) \in A \forall t \in [0, 1], \gamma(0) = u, \gamma(1) = v$. Siccome $t \rightarrow f(\gamma(t))$ e continua in $[0, 1]$ si ha $[a, b] \subset f \circ \gamma([0, 1])$ (teorema del valore intermedio per funzioni di una variabile!).

In quanto segue, $A \subset \mathbf{R}^n$, $f : A \rightarrow \mathbf{R}$, $D_r(u) \subset A$, $u = (x_1, \dots, x_n)$.

DERIVATE PARZIALI

Sia O aperto in \mathbf{R}^n , $f : O \rightarrow \mathbf{R}$. Se, fissati x_2, \dots, x_n , la funzione (di una variabile) $x_1 \rightarrow f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ é derivabile, diremo che f é (parzialmente) derivabile rispetto alla prima variabile x_1 in u e scriveremo

$$f_{x_1}(u) := \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, \dots, x_n) := \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{f(x_1 + \delta, x_2, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_n)}{\delta}$$

ovvero $\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, \dots, x_n) = \frac{d}{dt} f(t, x_2, \dots, x_n)|_{t=x_1}$. Analogamente,

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(u) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{f(x_1, \dots, x_j + \delta, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_n)}{\delta} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{f(u + \delta e_j) - f(u)}{\delta}$$

(e_j ha coordinate tutte nulle eccetto la j -esima, che vale 1) se tale limite esiste finito.

Sia O aperto: $f \in C^1(O)$ se $\frac{\partial f}{\partial x_j}$, $j = 1, \dots, n$ esistono e sono continue in O .

DERIVATE DIREZIONALI Sia $h \in \mathbf{R}^n$. Se $t \rightarrow f(u + th)$ é derivabile a destra in $t = 0$, diremo che f é derivabile nella direzione h in u e scriveremo

$$\frac{\partial f}{\partial h}(u) := \frac{d}{dt} f(u + th)|_{t=0^+} := \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(u + th) - f(u_0)}{t}$$

DIFFERENZIABILITÀ, DIFFERENZIALE, GRADIENTE

Se esiste un vettore $a \in \mathbf{R}^n$ tale che

$$f(u + h) - [f(u) + \langle a, h \rangle] = o(\|h\|) \quad \text{per } \|h\| \rightarrow 0$$

f si dice differenziabile in u , a si chiama gradiente di f in u e si denota $\nabla f(u)$:

$$\frac{f(u + h) - [f(u) + \langle \nabla f(u), h \rangle]}{\|h\|} \rightarrow_{\|h\| \rightarrow 0} 0$$

Il funzionale lineare in \mathbf{R}^n dato da $h \rightarrow \langle \nabla f(u), h \rangle$ si chiama differenziale di f in u e si indica $df(u)$. Dunque

$$df(u)(h) = \langle \nabla f(u), h \rangle \quad \forall h \in \mathbf{R}^n$$

$$f(u + h) = f(u) + df(u)(h) + o(\|h\|) \quad \text{per } \|h\| \rightarrow 0$$

ESEMPI 1 (i) $f(x, y) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1}y + \dots + a_{n-1} xy^{n-1} + a_n y^n$,
 $f(x, y) = e^{x^2+y^2}$, $f(x, y) = \sin xy$ sono di classe $C^1(\mathbf{R}^2)$

(ii) $f(x, y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$, se $x^2 + y^2 \neq 0$, $f(0, 0) = 0$ é di classe $C^1(\mathbf{R}^2 \setminus (0, 0))$
ed ha anche derivate parziali in $(0, 0)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{y^3 - yx^2}{(x^2 + y^2)^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x^3 - xy^2}{(x^2 + y^2)^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$$

Tuttavia f non ha derivata in $(0, 0)$ nella direzione h , a meno che non sia $h = (x, 0)$
oppure $h = (0, y)$ per qualche x, y , perché $f(tx, ty) = \frac{xy}{x^2+y^2}$.
Ricordiamo che f non é continua in zero. Dunque,

una funzione può avere derivate parziali in un punto senza essere continua in quel punto.

A futura memoria: $\frac{\partial f}{\partial x}(0, y) = \frac{1}{y} \forall y \neq 0$ e quindi $\frac{\partial f}{\partial x}$ non é continua in $(0, 0)$.

(iii) $f(x, y) = \frac{x^4 y}{x^6 + |y|^3}$, $f(0, 0) = 0$. É $\frac{f(tx, ty)}{t} = \frac{tx^4 y}{t^3 x^6 + |y|^3} \rightarrow_{t \rightarrow 0^+} 0 \Rightarrow$
 $\frac{\partial f}{\partial h}(0, 0) = 0 \forall h \in \mathbf{R}^2$. Siccome $f(x, x^2) \equiv \frac{1}{2}$, vediamo che

una funzione può essere derivabile, in un punto, lungo tutte le direzioni senza essere continua in quel punto.

(iiii) $f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}$, se $x^2 + y^2 \neq 0$, $f(0, 0) = 0$ é di classe $C^1(\mathbf{R}^2 \setminus (0, 0))$
ed ha derivate parziali anche in $(0, 0)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2xy^3}{(x^2 + y^2)^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x^4 - x^2 y^2}{(x^2 + y^2)^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$$

Inoltre, in $(0, 0)$, f é derivabile in tutte le direzioni: $\frac{\partial f}{\partial h}(0, 0) = \lim_t \frac{f(th)}{t} = f(h)$.

Ricordiamo inoltre che f é continua anche in zero.

Tuttavia f non é differenziabile in $(0, 0)$, perché, come vedremo nella seguente Proposizione 1, ciò comporterebbe $\frac{\partial f}{\partial h}(0, 0) = \langle \nabla f(0, 0), h \rangle$, ovvero, nell'esempio in questione, $f(h) = 0 \forall h \in \mathbf{R}^2$. Dunque

una funzione può essere continua e derivabile lungo tutte le direzioni, in un punto, senza essere differenziabile in quel punto.

Notiamo che: $|\frac{\partial f}{\partial x}(t, t)| = \frac{1}{2}$ per $t \neq 0$ e quindi $\frac{\partial f}{\partial x}$ non é continua in $(0, 0)$.

(v) $f(x, y) = \frac{x^4 y}{x^6 + y^2}$, se $x^2 + y^2 \neq 0$, $f(0, 0) = 0$ é di classe $C^1(\mathbf{R}^2 \setminus (0, 0))$ ed ha derivate parziali anche in $(0, 0)$, entrambe nulle. Inoltre, $f(tx, ty) = t^3 \frac{x^4 y}{t^4 x^6 + y^2} \rightarrow 0$ per $t \rightarrow 0$, cio'è f ha derivata nulla in tutte le direzioni. Tuttavia f non é differenziabile nell'origine, perché, essendo le derivate parziali in zero nulle, dovrebbe essere, in $(0, 0)$, $\lim_{(x^6+y^2)\sqrt{x^2+y^2}} \frac{x^4 y}{(x^6+y^2)\sqrt{x^2+y^2}} = 0$, mentre andando al limite lungo (x, x^3) , si trova $f(x, x^3) = \frac{x^7}{(x^6+x^6)\sqrt{x^2+x^6}} = \frac{1}{2\sqrt{1+x^4}}$ che tende a $\frac{1}{2}$ al tendere di x a zero. Dunque

una funzione può essere continua e derivabile lungo tutte le direzioni in un punto x , e la funzione $h \rightarrow \frac{\partial f}{\partial h}(x)$ risultare lineare in h , senza che f sia differenziabile in x .

Proposizione 1 Sia f differenziabile in u . Allora f é continua in u e

$$\forall h \in \mathbf{R}^2, \exists \frac{\partial f}{\partial h}(u) \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial h}(u) = \langle \nabla f(u), h \rangle$$

In particolare, $\frac{\partial f}{\partial x_j}(u)$ esistono per ogni j e $\nabla f(u) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(u), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(u) \right)$.

Infatti $|f(u+h) - f(u)| \leq |\langle \nabla f(u), h \rangle| + o(\|h\|) \leq (\|\nabla f(u)\| + o(1))\|h\|$,

e quindi f é continua in u . Poi, $\forall \epsilon > 0, \exists \delta_\epsilon : \|h\| = 1, |t| \leq \delta_\epsilon \Rightarrow$

$$\left| \frac{f(u+th) - f(u)}{t} - \langle \nabla f(u), h \rangle \right| = \left| \frac{f(u+th) - f(u) - \langle \nabla f(u), th \rangle}{t} \right| = \frac{o(\|th\|)}{|t|} \leq \epsilon .$$

In particolare, $\frac{\partial f}{\partial x_j}(u) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(u+te_j) - f(u)}{t} = \langle \nabla f(u), e_j \rangle$.

Una formula utile. Esattamente come sopra si vede che se f é differenziabile in ogni punto di $B_r(u)$ allora $t \rightarrow f(u+th)$ é (definita e) derivabile in $(-r, r)$ e

$$\frac{d}{dt} f(u+th) = \langle \nabla f(u+th), h \rangle$$

Proposizione 2 $f \in C^1(D_r(u)) \Rightarrow f$ é differenziabile in u .

Prova. Per semplicitá: $n = 2$. Scriviamo $u = (x, y)$. Da f_x, f_y continue segue

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta = \delta_\epsilon > 0 : \left| \frac{\partial f}{\partial x}(w) - \frac{\partial f}{\partial x}(v) \right| + \left| \frac{\partial f}{\partial y}(w) - \frac{\partial f}{\partial y}(v) \right| \leq \epsilon \quad \forall w, v \in D_\delta(u)$$

Applicando il Teorema Fondamentale del Calcolo a $\frac{d}{d\tau} f(\tau, y+t) = \frac{\partial f}{\partial x}(\tau, y+t)$ e a $\frac{d}{d\tau} f(x, \tau) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, \tau)$ otteniamo

$$\left| f(x+s, y+t) - f(x, y) - \left[\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)s + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)t \right] \right| =$$

$$\left| f(x+s, y+t) - f(x, y+t) - \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)s + f(x, y+t) - f(x, y) - \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)t \right| \leq$$

$$\left| \int_x^{x+s} \left[\frac{\partial f}{\partial x}(\tau, y+t) - \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \right] d\tau \right| + \left| \int_y^{y+t} \left[\frac{\partial f}{\partial y}(x, \tau) - \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right] d\tau \right|$$

$$\leq \epsilon (|s| + |t|) \quad \text{se} \quad s^2 + t^2 \leq \delta_\epsilon^2$$

ESEMPI 2. (j) Se $g \in C([a, b])$, $f(x, y) := \int_x^y g(t)dt$, $x, y \in [a, b] \times [a, b]$, é $\frac{\partial f}{\partial x} = -g(x)$, $\frac{\partial f}{\partial y} = g(y)$, $x, y \in (a, b)$ e quindi $f \in C^1((a, b) \times (a, b))$.

(jj) Le funzioni in Esempi 1-(ii)-(iii) sono differenziabili per la Prop. 2 in ogni $u \neq 0$ mentre in $(0, 0)$, pur avendo derivate parziali od addirittura derivate in tutte le direzioni, non sono differenziabili perché discontinue.

(jjj) $f(x, y) = \frac{x^2 y \sqrt{x^2 + y^2}}{x^4 + y^2}$, $f(0, 0) = 0$ é continua in $(0, 0)$ perché $|f(x, y)| \leq \frac{1}{2} \sqrt{x^2 + y^2}$. Inoltre $\frac{\partial f}{\partial h}(0) = \lim_t \frac{f(th)}{t} = 0 \quad \forall h \in \mathbf{R}^2$.

Ma f non é differenziabile in $(0, 0)$: $y = x^2 \Rightarrow \frac{f(x, y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} \equiv \frac{1}{2}$.

Il Teorema del valor medio Sia $f \in C^1(O)$, O aperto convesso. Allora

$$|f(u) - f(v)| \leq \|u - v\| \sup_{t \in [0, 1]} \|\nabla f(v + t(u - v))\|$$

Infatti $|f(u) - f(v)| = \left| \int_0^1 \left[\frac{d}{dt} f(v + t(u - v)) \right] dt \right| =$

$$\left| \int_0^1 \langle \nabla f(v + t(u - v)), u - v \rangle dt \right| \leq \|u - v\| \sup_{t \in [0, 1]} \|\nabla f(v + t(u - v))\|$$

Corollario Sia $f \in C^1(O)$, O aperto convesso per archi. Allora

$$\nabla f(u) = 0 \quad \forall u \in O \quad \Rightarrow \quad f \equiv \text{cost.} \quad \text{in } O$$

Prova. Fissati $u, v \in O$, sia $\gamma(t) = (x(t), y(t)) \in O \quad \forall t \in [0, 1]$, cammino continuo in O , con $\gamma(0) = u$, $\gamma(1) = v$. Il teorema del valor medio implica che f é costante sui dischi e quindi, dalla continuitá di γ segue: $\bar{t} := \sup\{t : f(\gamma(s)) = f(u) \quad \forall s \in [0, t]\} > 0$ e, argomentando per contraddizione, necessariamente $\bar{t} = 1$.

ESRCIZIO 1. Dati $\alpha, \beta > 0$, sia

$$f(x, y) = \frac{|x|^\alpha |y|^\beta}{x^2 + y^2} \quad \text{se } x^2 + y^2 \neq 0, \quad f(0, 0) = 0. \quad \text{É}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{|x|^\alpha |y|^\beta [(\alpha - 2)x^2 + \alpha y^2]}{x(x^2 + y^2)^2}, \quad \text{se } x^2 + y^2 \neq 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{|x|^\alpha |y|^\beta [\beta x^2 + (\beta - 2)y^2]}{y(x^2 + y^2)^2} \quad \text{se } x^2 + y^2 \neq 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$$

Abbiamo visto che f é continua in $(0, 0) \Leftrightarrow \alpha + \beta > 2$.
Provare ora che

- (i) esiste $\frac{\partial f}{\partial h}(0, 0) \quad \forall h \in \mathbf{R}^2 \Leftrightarrow \alpha + \beta > 3$
- (ii) f é differenziabile in $(0, 0) \Leftrightarrow \alpha + \beta > 3$
- (iii) $f \in C^1 \Leftrightarrow \alpha + \beta > 3$ e $\alpha, \beta \geq 1$.

(i) $\alpha + \beta < 3 \Rightarrow \frac{f(tx, ty)}{t} = t^{\alpha+\beta-3} f(x, y) \rightarrow_{x^2+y^2 \rightarrow 0} +\infty$ (se $x^2 + y^2 \neq 0$)
e $\alpha + \beta = 3 \Rightarrow \frac{f(tx, ty)}{t} \rightarrow_{x^2+y^2 \rightarrow 0} f(x, y)$ e quindi, se $\alpha + \beta \leq 3$,
 f non é derivabile, in $(0, 0)$, nelle direzioni $h = (x, y) \neq (0, 0)$. Invece,
 $\alpha + \beta > 3 \Rightarrow \frac{f(tx, ty)}{t} \rightarrow_{x^2+y^2 \rightarrow 0} 0$ e quindi $\frac{\partial f}{\partial h}(0, 0) = 0 \quad \forall h \in \mathbf{R}^2$.

(ii) Da (ii) segue che f non é differenziabile in $(0, 0)$ se $\alpha + \beta \leq 3$.
Sia $\alpha + \beta > 3$.
Siccome $f_x(0, 0) = f_y(0, 0) = 0$

$$f \text{ é differenziabile in } (0, 0) \Leftrightarrow \frac{f(x, y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} \rightarrow_{x^2+y^2 \rightarrow 0} 0$$

Siccome

$$\alpha \geq 3, \quad \alpha + \beta > 3 \Rightarrow \frac{|x|^\alpha |y|^\beta}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} \leq (x^2 + y^2)^{\frac{\alpha-3}{2}} |y|^\beta \rightarrow_{x^2+y^2 \rightarrow 0} 0$$

basta considerare il caso $\alpha, \beta \in (0, 3)$. Posto $\tau := \frac{\alpha + \beta - 3}{2}$ é
allora $\tau \in (0, \frac{1}{2} \min\{\alpha, \beta\})$, $\alpha + \beta - 2\tau = 3$ e

$$\frac{f(x, y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \left[\frac{|x|^{\frac{2}{3}(\alpha-\tau)} |y|^{\frac{2}{3}(\beta-\tau)}}{x^2 + y^2} \right]^{\frac{3}{2}} |x|^\tau |y|^\tau \leq |x|^\tau |y|^\tau \rightarrow_{x^2+y^2 \rightarrow 0} 0$$

di nuovo in virtú di (*).

(iii) Da (iii) segue che f non é C^1 se $\alpha + \beta \leq 3$. Sia $\alpha + \beta > 3$.

Come in (i) $\alpha \geq 1$, $\alpha + \beta > 3 \Rightarrow \left| \frac{\partial f}{\partial x} \right| \leq \alpha \frac{|x|^{\alpha-1} |y|^\beta}{x^2 + y^2} \rightarrow_{x^2+y^2 \rightarrow 0} 0$

mentre, se $\alpha \in (0, 1)$ e $\gamma \gg 1$ risulta

$$\frac{\partial f}{\partial x}(t^\gamma, t) = \frac{t^{\beta-2-\gamma(1-\alpha)} [(\alpha-2)t^{2\gamma-2} + \alpha]}{(t^{2\gamma+2} + 1)^2} \rightarrow_{t \rightarrow 0^+} +\infty$$

Analogamente, $f_y \rightarrow_{x^2+y^2 \rightarrow 0} 0$ sse $\alpha + \beta > 3$ e $\beta \geq 1$.

ESERCIZIO 2. Dati $\alpha, \beta > 0$, sia

$$g(x, y) = \frac{|x|^\alpha |y|^\beta}{x^4 + y^2} \quad \text{se } x^2 + y^2 \neq 0, \quad g(0, 0) = 0. \quad \text{É}$$

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{|x|^\alpha |y|^\beta [(\alpha-4)x^4 + \alpha y^2]}{x(x^4 + y^2)^2} \quad \text{se } x^2 + y^2 \neq 0, \quad \frac{\partial g}{\partial x}(0, 0) = 0$$

$$\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{|x|^\alpha |y|^\beta [\beta x^4 + (\beta-2)y^2]}{y(x^4 + y^2)^2} \quad \text{se } x^2 + y^2 \neq 0, \quad \frac{\partial g}{\partial y}(0, 0) = 0$$

Provare che

- (i) g é continua in $(0, 0) \Leftrightarrow \alpha + 2\beta > 4$
- (ii) esiste $\frac{\partial g}{\partial h}(0, 0) \quad \forall h \in \mathbf{R}^2 \Leftrightarrow \alpha + \beta > 3$
- (iii) g é differenziabile in $(0, 0) \Leftrightarrow \alpha + 2\beta > 5$ e $\alpha + \beta > 3$
- (iv) $g \in C^1 \Leftrightarrow \alpha + 2\beta > 6$ e $\alpha, \beta \geq 1$.

(i) Se $\alpha + 2\beta < 4$, $g(tx, t^2y) = t^{\alpha+2\beta-4}g(x, y)$ non va a zero al tendere di t a zero (se $x^2 + y^2 \neq 0$) e quindi g non é continua in $(0, 0)$.

Sia dunque $\alpha + 2\beta > 4$.

Se $f(x, y) := \frac{|x|^{\frac{\alpha}{2}} |y|^\beta}{x^2 + y^2}$ é $g(x, y) = f(x^2, y) \rightarrow_{x^2+y^2 \rightarrow 0} 0$ perché $\frac{\alpha}{2} + \beta > 2$ (vedi l'esercizio 1) e quindi g é continua.

(ii) $\alpha + \beta < 3 \Rightarrow \frac{g(tx, ty)}{t} = t^{\alpha+\beta-3} \frac{|x|^\alpha |y|^\beta}{t^2 x^4 + y^2} \rightarrow_{x^2+y^2 \rightarrow 0} +\infty$ e

$\alpha + \beta = 3 \Rightarrow \frac{g(tx, ty)}{t} \rightarrow_{x^2+y^2 \rightarrow 0} \frac{|x|^\alpha |y|^\beta}{y^2}$ (se $x^2 + y^2 \neq 0$) e quindi,
 $\alpha + \beta \leq 3 \Rightarrow f$ non é derivabile, in $(0, 0)$, nelle direzioni $h = (x, y) \neq (0, 0)$.
 $\alpha + \beta > 3 \Rightarrow \frac{f(tx, ty)}{t} \rightarrow_{x^2+y^2 \rightarrow 0} 0 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial h}(0, 0) = 0 \quad \forall h \in \mathbf{R}^2$.

(iii) Siccome $g_x(0,0) = g_y(0,0) = 0$

$$g \text{ é differenziabile in } (0,0) \Leftrightarrow \frac{g(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} \rightarrow_{x^2+y^2 \rightarrow 0} 0$$

Siccome $\alpha + 2\beta \leq 5 \Rightarrow \frac{g(t,t^2)}{\sqrt{t^2+t^4}} = t^{\alpha+2\beta-5} \frac{1}{2(1+t^2)}$ non tende a zero al tendere di t a zero, g non é differenziabile in $(0,0)$ se $\alpha + 2\beta \leq 5$. Inoltre da (ii) segue che g non é differenziabile in $(0,0)$ se $\alpha + \beta \leq 3$.

Sia dunque $\alpha + \beta > 3$ e $\alpha + 2\beta > 5$. Da (i) e (*) segue:

$$\alpha \geq 1, \alpha + 2\beta > 5 \Rightarrow \frac{g(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{|x|}{\sqrt{x^2+y^2}} \frac{|x|^{\alpha-1} |y|^\beta}{x^4+y^2} \leq \frac{|x|^{\alpha-1} |y|^\beta}{x^4+y^2} \rightarrow_{x^2+y^2 \rightarrow 0} 0$$

$$\alpha < 1, \alpha + \beta > 3 \Rightarrow \frac{g(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{|y|^{\beta+\alpha-1}}{x^4+y^2} \left[\frac{|x|^{2\alpha} |y|^{2-2\alpha}}{x^2+y^2} \right]^{\frac{1}{2}} \leq |y|^{\alpha+\beta-3} \rightarrow_{x^2+y^2 \rightarrow 0} 0$$

(iv) Se $\alpha < 1$ e $\gamma \gg 1$ risulta

$$\frac{\partial g}{\partial x}(t^\gamma, t) = \frac{t^{\beta-2-\gamma(1-\alpha)} [(\alpha-4)t^{4\gamma-2} + \alpha]}{(t^{4\gamma-2} + 1)^2} \rightarrow_{t \rightarrow 0^+} +\infty$$

Se $\beta < 1$ e $\gamma \gg 1$ risulta

$$\frac{\partial g}{\partial y}(t, t^\gamma) = \frac{t^{\alpha-4-\gamma(1-\beta)} [\beta + (\beta-2)t^{2\gamma-4}]}{(1 + t^{2\gamma-4})^2} \rightarrow_{t \rightarrow 0^+} +\infty$$

Da (iii) segue che f non é C^1 se $\alpha + \beta \leq 3$. Inoltre, $\frac{\partial g}{\partial y}(t, t^2) = \frac{\beta-1}{2} t^{\alpha+2\beta-6}$ non tende a zero al tendere di t a zero se $\alpha + 2\beta \leq 6$ e quindi neanche in tal caso f ha derivate parziali continue in $(0,0)$.

Siano quindi $\alpha, \beta \geq 1$, $\alpha + 2\beta > 6$. Da (i) segue

$$\left| \frac{\partial g}{\partial x} \right| \leq \frac{|x|^{\alpha-1} |y|^\beta}{x^4+y^2} \frac{(\alpha-4)x^4 + \alpha y^2}{x^4+y^2} \rightarrow_{x^2+y^2 \rightarrow 0} 0$$

$$\left| \frac{\partial g}{\partial y} \right| \leq \beta \frac{|y|^{\beta-1} |x|^\alpha}{x^4+y^2} \rightarrow_{x^2+y^2 \rightarrow 0} 0$$