AM2-07/08: Settimana 3

SERIE TOTALMENTE CONVERGENTI

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ é totalmente convergente in E se

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sup_{x\in E} \; |a_n(x)| \; < \; +\infty$$

La totale convergenza implica l'uniforme convergenza:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sup_{x\in E} \; |a_n(x)| \; < \; +\infty \; \Rightarrow |\sum_{j=n}^{n+p} a_j(x)| \; \leq \; \sum_{j=n}^{n+p} |a_j(x)| \leq \sum_{j=n}^{n+p} \sup_{x\in E} \; |a_n(x)| \leq \epsilon \;\; \forall x \in E$$

ESEMPI di serie uniformemente convergenti ma non totalmente convergenti:

1. Se $a_n(x) \equiv \frac{(-1)^n}{n}$, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ converge, ovviamente in modo uniforme , ma non é totalmente convergente, perché $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n(x)| = +\infty$.

2. sia $f \in C(\mathbf{R})$, nulla fuori di $(0,1)$, $a_n(x) := \frac{1}{n} f(x-n)$.
La serie di funzioni $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} f(x-n)$ converge alla funzione $S(x)$ che vale $\frac{1}{n} f(x-n)$ in $[n, n+1]$ e zero se $x \leq 0$. Inoltre la convergenza é uniforme in $\mathbf{R}$, perché $|S(x) - S_n(x)| = |\sum_{j>n} \frac{1}{j} f(x-j)| \leq \frac{1}{n+1} \sup_{\mathbf{R}} \; |f| \; \to 0$.
La convergenza peró non é totale, perché $\sup_{x\in\mathbf{R}} \; |a_n(x)| \; = \; \frac{1}{n} \sup_{x\in\mathbf{R}} \; |f(x)|$.

Convergenza totale delle serie di potenze. Se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ha raggio di convergenza r, allora $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge totalmente in $[-\delta, \delta]$, $\forall \delta < r$:

$$\sup_{|x|\leq\delta} |a_n x^n| = |a_n|\delta^n \quad \text{e} \quad \sum_{0}^{\infty} |a_n|\delta^n < +\infty$$

La somma di una serie di potenze é una funzione C^∞.

Le $a_n(x) := a_n x^n$ sono funzioni C^∞ e la serie delle derivate k-esime

$$\sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\dots(n-k+1) a_n x^{n-k} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(j+k)!}{j!} a_{j+k} x^j$$

é anch'essa serie di potenze ed il suo raggio di convergenza é

$$(\limsup_n |n(n-1)\dots(n-k+1)a_n|^{\frac{1}{n}})^{-1} = (\limsup_n |a_n|^{\frac{1}{n}})^{-1}$$

ESEMPI: $\quad \frac{k!}{(1-x)^{k+1}} = \frac{d^k}{dx^k}(\frac{1}{1-x}) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(j+k)!}{j!} x^j, \quad \forall x \in (-1,1).$

$$\frac{k!}{(1-x)^{k+1}} = \frac{d^k}{dx^k}\frac{1}{1-x} = \frac{d^k}{dx^k}\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+k)!}{n!}x^n$$

$$\arctan x = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \int_0^x [\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^{2n}]\,dt = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}$$

$$\sin^{-1} x = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = x + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2n-1!!}{2n!!(2n+1)}x^{2n+1}$$

$$\sinh^{-1} x = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} = x + \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{2n-1!!}{2n!!(2n+1)}x^{2n+1}$$

Teorema di Abel. Se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ha raggio di convergenza r e $\sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n$ converge allora la convergenza della serie é uniforme in $[0,r]$. In particolare, $f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ é continua anche in $x = r$.

ESEMPI.
$\log(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}x^n$ in $(-1,1)$. La serie converge, per Leibnitz, anche in $x = 1$ e definisce quindi una funzione continua in tutto $[0,1]$ che, coincidendo con $\log(1+x)$ in $(-1,1)$, vale $\log 2$ in $x = 1$:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n} = \log 2$$

Analogamente, $\frac{\pi}{4} = \arctan 1 = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}$

La serie di Taylor di $\frac{1}{\sqrt{1+x}}$ in $(-1,1)$, data da $1 + \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{2n-1!!}{2n!!}x^n$, converge anche in $x = 1$, perché $\frac{2n-1!!}{2n!!} : \frac{2n+1!!}{2n+2!!} = \frac{2n+2}{2n+1} > 1$. In particolare

$$1 + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2^n}\frac{2n-1!!}{n!} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Le serie di Taylor di $\sin^{-1} x$ e di $\sinh^{-1} x$ converge assolutamente in 1 e -1. In particolare,

$$1+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2n-1!!}{2n!!(2n+1)} = \sin^{-1} 1 = \frac{\pi}{2}, \qquad 1+\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{2n-1!!}{2n!!(2n+1)} = \sinh^{-1} 1 = \log(1+\sqrt{2})$$

Criterio di Leibnitz. Se $0 \le a_{n+1}(x) \le a_n(x)$ $\forall x \in E,\ n \in \mathbf{N}$, allora

$$\sup_{x\in E} a_n(x) \to_{n\to+\infty} 0 \;\Rightarrow\; \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n a_n(x) \text{ converge uniformemente in } E$$

Intanto, la serie converge puntualmente in E per il criterio di Leibnitz per le serie numeriche. La convergenza é anche uniforme perché

$$-a_{2n-1}(x) \le \sum_{k=2n-1}^{+\infty} (-1)^k a_k(x) \le 0, \quad a_{2n}(x) \ge \sum_{k=2n}^{+\infty} (-1)^k a_k(x) \ge 0 \quad \forall x \in E \quad \Rightarrow$$

$$|\sum_{k=n}^{+\infty} (-1)^k a_k(x)| \le a_n(x) \to_{n\to+\infty} 0 \quad \text{uniformemente in} \quad E$$

Integrazione per serie negli integrali impropri.

Siano $f_n \ge 0$ continue in (a,b), $-\infty \le a < b \le +\infty$. Se la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ converge uniformemente sui sottointervalli compatti di (a,b), allora

$$\int_a^b [\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)]\, dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x)\, dx$$

Infatti, posto $S(x) := \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n \ge \sum\limits_{n=1}^{N} f_n(x)$

se $\int\limits_a^b S(x)\, dx < +\infty$, la successione delle somme parziali é equidominata e quindi é lecito il passaggio al limite sotto segno di integrale,
se $\int\limits_a^b S(x)\, dx = +\infty$, allora $a < \alpha < \beta < b \Rightarrow$
$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \int\limits_a^b f_n(x)\, dx \ge \sum\limits_{n=1}^{\infty} \int\limits_\alpha^\beta f_n(x)\, dx = \int\limits_\alpha^\beta S(x)\, dx \to_{\alpha\to a,\ \beta\to b} = \int\limits_a^b S(x)\, dx = +\infty$

ESERCIZIO Provare che se f é limite uniforme in E di funzioni f_n limitate in E allora f é limitata in E. Provare con un controesempio che f puó non essere limitata in E se la convergenza non é uniforme.
ESERCIZIO Siano $f_n \in C([a,b])$. Provare che se f_n converge uniformemnte in $(a,b]$ allora la convergenza é uniforme su tutto $[a,b]$. Provare con un controesempio che la conclusione puó essere falsa se le f_n sono solo $C((a,b])$.
ESERCIZIO. Sia $f(x) := \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$. Provare che $f \in C^\infty((1,+\infty))$ e $\int\limits_1^2 f(x)dx = +\infty$