# AM2-07/08: Settimana 2

## SUCCESSIONI E SERIE DI FUNZIONI

**CONVERGENZA PUNTUALE**. Sia $E \subset \mathbf{R}$. Siano $f_n : E \to \mathbf{R}$.

Diremo che **la 'successione di funzioni'** $f_n$ **converge puntualmente in** $E$ **alla funzione** $f$ se, per ogni $x \in E$, $f_n(x) \to_n f(x)$

Diremo che **la serie di funzioni** $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ **converge puntualmente in** $E$ se la successione delle somme parziali $S_n(x) := \sum_{j=1}^{n} a_n(x)$ converge puntualmente in $E$ e scriveremo

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) := \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} f_n(x)$$

ESEMPI. 1. Se $f_n(x) \equiv a_n$, $x \in E \subset \mathbf{R}$ , le $f_n$ convergono se e solo se $a_n$ converge e, in tal caso, $\lim_n f_n(x) \equiv \lim a_n$.
2. Se $f_n(x) = x^n, x \in [0,1]$, allora $f_n$ converge alla funzione che vale zero in $[0,1)$ e vale 1 in $x = 1$.
3. Ogni serie di potenze converge puntualmente dentro il proprio intervallo di convergenza.
4. La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \sin(nx)$ converge se e solo se $x = m\pi$ per qualche intero $m$ (ed in tal caso la somma é zero) giacché $\limsup_n |\sin(nx)| > 0$ se $x \notin \mathbf{Z}\pi$. Infatti, sia $\limsup_n |\sin(nx)| = 0$ e quindi $\lim_n[\sin(nx)] = 0$. Sia $m(n) \in \mathbf{Z}$ tale che $m(n)\pi \leq nx \leq [n(m)+1]\pi$. Allora $\min\{nx - m(n)\pi, \quad (m(n)+1)\pi - nx\} \to_n 0$, altrimenti esistono $n_k \to_k +\infty$ e $\delta > 0$ tali che $m(n_k)\pi + \delta \leq n_k x \leq (m(n_k)+1)\pi - \delta$ e quindi $|\sin(n_k x)| \geq \sin\delta$. Dunque, per ogni $n$ esiste $l_n \in \mathbf{Z}$ tale che $nx = l_n\pi + \circ(1)$. Allora, per ogni $n$, risulta $\circ(1) + l_{n+1}\pi = (n+1)x = x + l_n\pi + \circ(1)$ e quindi $x = (l_{n+1} - l_n)\pi + \circ(1)$. Da ció segue che $k_n := l_{n+1} - l_n$ é una successione limitata e quindi esiste $k_{n_j}$ convergente a qualche intero $k$. Da $x = k_{n_j}\pi + \circ(1) \to_j k\pi$ segue appunto $x = k\pi$. Notiamo, in aggiunta, che $\liminf_n |\sin(nx)| = 0$ per ogni $x$. Questo é ovvio se $x$ é multiplo razionale di $\pi$, mentre, se $\frac{x}{\pi} \notin \mathbf{Q}$, usiamo il fatto (non banale..) che esistono $n_k \in \mathbf{N}, m_k \in \mathbf{Z}$ tendenti all'infinito tali che $|\frac{x}{\pi} - \frac{m_k}{n_k}| \leq \frac{1}{n_k^2}$ e quindi $|n_k x - m_k\pi| = \circ(1)$ e quindi $\sin(n_k x) = \sin(n_k x - m_k\pi) = \circ(1)$.
Concludiamo che $\lim_n(nx)$ esiste se e solo se $x$ é multiplo intero di $\pi$.

In generale le proprietá delle $f_n$ non si conservano nel limite puntuale. Nell'esempio $f_n(x) = x^n$, $x \in [0,1]$ le $f_n$ sono continue, ma il loro limite non lo é. Ció si puó escludere se 'la convergenza é..piú forte':

**CONVERGENZA UNIFORME**. Se $f_n$ converge puntualmente in $E$ ad $f$, si dice che la convergenza é uniforme (in $E$) se

$$\sup_{x\in E} |f_n(x) - f(x)| \to_{n\to\infty} 0$$

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ si dice uniformemente convergente in $E$ se $S_n(x) := \sum_{j=1}^{n} a_n(x)$ converge uniformemente in $E$

ESEMPI. 1. La successione $f_n(x) = x^n$ converge uniformemente a zero in $[0,a]$ se $0 < a < 1$, ma la convergenza **non é uniforme** in $[0,1)$. Infatti

$$\sup_{x\in[0,a]} x^n = a^n \to 0 \qquad \text{mentre} \qquad \sup_{x\in[0,1)} x^n = 1$$

2. ( **Traslazioni**). Sia $f$ una funzione (non identicamente nulla) nulla fuori di $(0,1)$. Siano $f_n(x) := f(x-n)$ le traslate di $f$. Allora $f_n(x) \to_{n\to\infty} 0$ $\forall x \in \mathbf{R}$, ma la convergenza **non é uniforme**, giacché $\sup_{\mathbf{R}} |f_n| = \sup_{\mathbf{R}} |f|$.

3. ( **Cambi di scala**). Sia $f$ una funzione (non identicamente nulla) nulla fuori di $(0,1)$. Siano $f_n(x) := f(nx)$ . Allora $f_n(x) \to_{n\to\infty} 0$, $\forall x \in \mathbf{R}$, ma la convergenza **non é uniforme**, giacché $\sup_{\mathbf{R}} |f_n| = \sup_{\mathbf{R}} |f|$.

4. $f_n(x) := \min\{n, \frac{1}{x}\} \to_{n\to\infty} \frac{1}{x}$, $\forall x \in (0,1]$, ma la convergenza **non é uniforme** in $(0,1]$. Infatti $\sup_{(0,1]} \frac{1}{x} = +\infty$ mentre vale chiaramente la seguente

**Proprietá**.

$$\sup_{x\in E} |f_n(x)| < +\infty, \quad f_n \to_{n\to\infty} f \quad \text{uniformemente in E} \quad \Rightarrow \quad \sup_{x\in E} |f(x)| < +\infty$$

**Teorema 1 (la convergenza uniforme conserva la continuitá)**.

$$f_n \in C(E), \quad f_n \to_n f \quad \text{uniformemente in} \quad E \quad \Rightarrow \quad f \in C(E)$$

Dimostrazione. Fissato $\epsilon > 0$ siano $n_\epsilon$, $\delta_\epsilon > 0$ tali che
$|f_{n_\epsilon}(x) - f(x)| \le \epsilon$, $\forall x \in E$, $|f_{n_\epsilon}(x) - f_{n_\epsilon}(x_0)| \le \epsilon$ $\forall x \in E, |x - x_0| \le \delta_\epsilon$. Allora

$$|f(x) - f(x_0)| \le 2\epsilon, \ \forall x \in E, |x - x_0| \le \delta_\epsilon$$

NOTA. Se la convergenza non é uniforme il limite puó non essere continuo.

Controesempio: $f_n(x) = x^n$, $x \in [0,1]$.

**Teorema 2 (Passaggio al limite sotto segno di integrale)**

$$f_n \in C([a,b]), \quad f_n \to_n f \ \text{ uniformemente in } [a,b] \ \Rightarrow \ \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n \ = \ \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n$$

Dimostrazione. Infatti, $f$ é continua in $[a,b]$ e

$$|\int_a^b f_n - \int_a^b f| \ \le \ \int_a^b |f_n - f| \ \le \ (b-a) \sup_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)| \ \to_{n\to\infty} 0$$

NOTA. Siano $f_n$ integrabili in $[a,b]$, $f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x), x \in [a,b]$.
Se la convergenza non é uniforme, puó accadere che $f$ non sia integrabile.
Ad es., se $n \to q_n$ é biiezione di $\mathbf{N}$ su $\mathbf{Q}\cap[0,1]$ e $f_n := \chi_{\{q_1,\dots,q_n\}}$, $\chi_{\mathbf{Q}\cap[0,1]} = \lim_{n\to\infty} f_n$ non é integrabile.
Ed anche se $f$ risulta integrabile, puó accadere che $\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n \neq \int_a^b f$.
Ad esempio, se $f(x) := \frac{x}{1+x^4}$, si ha $f_n(x) := nf(nx) = \frac{n^2 x}{1+n^4x^4} \to_n 0 \ \forall x \in R$
ma $\int_0^1 f_n(x)dx = \int_0^n f \to \int_0^\infty \frac{xdx}{1+x^4} \neq 0 \ = \ \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n$.

**Teorema 3 (il limite delle derivate é la derivata del limite)**.

Siano $I$ intervallo aperto, $f, g : I \to \mathbf{R}$, $f_n \in C^1(I)$ tali che $f_n(x) \to_n f(x)$ e $f_n'(x) \to_n g(x)$ in $I$. Allora

$$f_n' \to_n g \quad \text{uniformemente in} \quad I \quad \Rightarrow \quad f \in C^1(I) \quad \text{e} \quad (\lim_n f_n)' \equiv \lim_n f_n'$$

Dimostrazione. Se $x_0 \in I$, le ipotesi piú il TFC ed il Teorema 2, danno:

$$f(x) \ = \ \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x_0) + \lim_{n\to\infty} \int_{x_0}^x f_n'(t)dt \ = \ f(x_0) + \int_{x_0}^x g(t)dt$$

NOTA. La convergenza uniforme delle $f_n'$ é essenziale. Controesempi:

Sia $f_n(x) := |x|^{1+\frac{1}{n}}$, $x \in (-1,1)$. É $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = |x|$ (limite uniforme!) che non é derivabile in $x = 0$ anche se le $f_n$ sono di classe $C^1$. Notare che $f_n'(x) = (1+\frac{1}{n})\frac{x}{|x|}|x|^{\frac{1}{n}} \to_{n\to\infty} \frac{x}{|x|}$, per $x \neq 0$ e $f_n'(0) \to_n 0$ (convergenza non uniforme!)

Sia $f_n(x) = \frac{1}{n}\arctan(nx)$, successione (uniformemente) convergente a zero in $\mathbf{R}$ di funzioni di classe $C^1$. É $f_n'(x) = \frac{1}{1+nx^2} \to_{n\to\infty} \chi_{\{0\}}$. Dunque la derivata del limite non é (in $x = 0$) il limite delle derivate.

**Integrazione e derivazione termine a termine nelle serie di funzioni**.

(i) Siano $a_n \in C([a,b])$. Se la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ é uniformemente convergente in $[a,b]$, allora $S(x) := \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ é continua in $[a,b]$.

(ii) Siano $a_n \in C([a,b])$. Se la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ é uniformemente convergente in $[a,b]$, allora

$$\int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b a_n(x)dx$$

(iii) Siano $a_n \in C^1(I)$. Se la serie di funzioni $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ converge in qualche punto di $I$ e la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n'(x)$ converge uniformemente in $I$, allora

$$\frac{d}{dx}\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{da_n}{dx}(x)$$

**Il criterio di Cauchy**.

$f_n$ é uniformemente convergente in $E$ se e solo $f_n$ é $''$ **Cauchy uniforme** $''$:

$$\forall\epsilon > 0,\ \exists n_\epsilon :\ n,m \geq n_\epsilon \quad \Rightarrow \quad \sup_{x\in E} |f_n(x) - f_m(x)| \leq \epsilon$$

Dimostrazione.

NECESSITÁ: $f_n \to f$ uniformemente in $E$ $\Rightarrow$
$\exists n_\epsilon :\ |f_n(x) - f_m(x)| \leq |f_n(x) - f(x)| + |f(x) - f_m(x)| \leq \epsilon\ \forall x \in E$ se $n, m \geq n_\epsilon$.

SUFFICENZA: intanto, per ogni fissato $x$ in $E$, la successione $n \to f_n(x)$ é di Cauchy, e quindi $f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ esiste finito per ogni $x$ in $E$.

Poi, dall'ipotesi, fissato $\epsilon > 0$, $\exists n_\epsilon$ tale che

$$|f_n(x) - f(x)| \leq |f_n(x) - f_{n+p}(x)| + |f_{n+p}(x) - f(x)| \leq \epsilon + |f_{n+p}(x) - f(x)|\ \forall x \in E$$

se $n \geq n_\epsilon$ e quale che sia $p \in \mathbf{N}$. Fissato $n \geq n_\epsilon$ e mandando $p$ all'infinito in $|f_n(x) - f(x)| \leq \epsilon + |f_{n+p}(x) - f(x)|\ \ \forall x \in E$ si ottiene $|f_n(x) - f(x)| \leq \epsilon\ \ \forall x \in E$ e per ogni $n \geq n_\epsilon$ cioé $f_n$ converge uniformemente ad $f$.

**Criterio di Cauchy (per le serie)** . $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ converge uniformemente in $E$ sse

$$\forall\epsilon > 0,\ \exists n_\epsilon :\ n \geq n_\epsilon, p \in \mathbf{N} \ \Rightarrow\ \sup_{x\in E}\ |\sum_{j=n}^{n+p} a_j(x)| \leq \epsilon$$