AM2 2006-2007: I ESONERO

TEMA 1. Data la serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \ x^n, \quad a_n \in \mathbf{R}, x \in \mathbf{R}$$

provare che esiste $r \geq 0$ tale che la serie converge se $|x| < r$ e non converge se $|x| > r$. Esprimere tale r in funzione dei coefficenti a_n.
Mostrare con degli esempi che la serie puó avere qualsiasi comportamento per $|x| = r$.
Provare infine che $f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n \ x^n$, definita in $(-r, r)$, é ivi analitica .

TEMA 2. Siano $f_n \in C^1((-1,1))$. Provare che se $f_n(0)$ converge ed f'_n converge uniformemente in $(-1,1)$, allora f_n converge uniformemente in $(-1,1)$ ad una funzione di classe C^1.
Dedurre che, se $g_n \in C^1((-1,1))$ sono tali che

$$g_n(0) = 0 \quad \forall n \in \mathbf{N}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sup_{x \in (-1,1)} |g'_n(x)| \right) < +\infty$$

allora

$$g(x) := \sum_{n=0}^{\infty} g_n(x)$$

é definita e di classe C^1 in $(-1,1)$.

TEMA 3 (Heine-Cantor). Sia K un sottoinsieme compatto di $\mathbf{R}^n$.
Sia $f \in C(K, \mathbf{R}^m)$. Provare che f é uniformemente continua in K.

TEMA 4. Enunciare e dimostrare le formule di Eulero.

TEMA 5. Sia O aperto convesso in $\mathbf{R}^2$, $f \in C^1(O)$.
Siano $v_0 := (x_0, y_0)$ e $v_1 := (x_1, y_1)$ punti di O. Provare che $\varphi(t) := f(tv_1 + (1-t)v_0)$ é derivabile in $(0,1)$ e

$$\varphi'(t) = f_x(tv_1 + (1-t)v_0)(x_1 - x_0) + f_y(tv_1 + (1-t)v_0)(y_1 - y_0)$$

Dedurre che se $f_x \equiv f_y \equiv 0$ in O allora f é una costante.

ESERCIZIO 1 Trovare il raggio di convergenza delle serie di potenze in $\mathbf{C}$:

$$(i)\ \sum_{n=1}^{\infty} \left(z \arccos e^{-n}\right)^n \qquad\qquad (ii)\ \sum_{n=0}^{\infty} [\cos n + i \sin n]\, z^n \qquad z \in \mathbf{C}$$

e determinarne il comportamento sul bordo dei rispettivi dischi di convergenza.

ESERCIZIO 2 Provare che la serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_0^{\frac{x}{n}} e^{-n^4 t^2} dt \right), \qquad x \in \mathbf{R}$$

converge per ogni x. Stabilire se la convergenza é uniforme e determinare per quali x la funzione

$$f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_0^{\frac{x}{n}} e^{-n^4 t^2} dt \right)$$

é derivabile.

ESERCIZIO 3 Sia

$$f(x,y) = \frac{x^{\frac{11}{3}} \log(x^2 y^2) y^{\frac{4}{3}}}{x^6 + y^2} \quad \text{se} \quad xy \neq 0, \qquad f(x,y) = 0 \qquad \text{se} \quad xy = 0$$

Stabilire se f é continua, dotata di derivate direzionali e differenziabile.

ESERCIZIO 4 Siano $f_n \in C^1(\mathbf{R})$ tali che $\sup_n |f_n(0)| < +\infty$. Provare che se f_n' ha una sottosuccessione uniformemente convergente in $[-1,1]$ allora f_n ha una sottosuccessione uniformemente convergente in $[-1,1]$

SOLUZIONI

ESERCIZIO 1

(i) É $\lim_{n\to+\infty} \arccos e^{-n} = \frac{\pi}{2}$. Quindi la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (z \arccos e^{-n})^n$ ha raggio di convergenza $\frac{2}{\pi}$.

La serie non converge se $|z| = \frac{2}{\pi}$, perché $|z \arccos e^{-n}|^n \to_{n\to+\infty} 1$. Infatti, dalla formula di Mac Laurin per $\arccos x$,

$$\frac{2}{\pi} \arccos e^{-n} = 1 - \frac{2}{\pi} e^{-n} + \circ(e^{-n}) \quad per \quad n \to +\infty$$

e quindi, dalla formula di Mac Laurin per $\log(1+x)$,

$$(\frac{2}{\pi} \arccos e^{-n})^n = e^{n \log\left[1 - \frac{2}{\pi} e^{-n} + \circ(e^{-n})\right]} = e^{n\left[-\frac{2}{\pi} e^{-n} + \circ(e^{-n})\right]} \to_{n\to+\infty} 1$$

(ii) Siccome $|\cos(n) + i \sin n| = 1$, la serie $\sum_{n=0}^{\infty} [\cos(n) + i \sin n] z^n$ ha raggio di convergenza 1. Inoltre, $|[\cos(n) + i \sin n] z^n| = 1$ se $|z| = 1$ e quindi la serie non converge in alcun punto del bordo del cerchio di convergenza.

ESERCIZIO 2 La serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_0^{\frac{x}{n}} e^{-n^4 t^2} dt \right), \qquad x \in \mathbf{R}$$

é totalmente convergente perché, effettuando il cambio di variabile $\tau = n^2 t$ si trova

$$\left| \int_0^{\frac{x}{n}} e^{-n^4 t^2} dt \right| = \frac{1}{n^2} \left| \int_0^{nx} e^{-\tau^2} d\tau \right| \le \frac{1}{n^2} \int_0^{+\infty} e^{-\tau^2} d\tau$$

La serie delle derivate

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} e^{-n^2 x^2}, \qquad x \in \mathbf{R}$$

converge totalmente in $|x| \ge \delta > 0$ perché $0 \le \frac{1}{n} e^{-n^2x^2} \le \frac{1}{n} e^{-\delta^2 n^2}$ se $|x| \ge \delta$ e quindi $f(x) := \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\int\limits_0^{\frac{x}{n}} e^{-n^4 t^2} dt \right)$ é derivabile in ogni $x \neq 0$. Ma non é derivabile in $x = 0$ perché $f(0) = 0$ e

$$\frac{f(x)}{x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 x} \int\limits_0^{nx} e^{-\tau^2} d\tau \ge \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2 x} \int\limits_0^{nx} e^{-\tau^2} d\tau \quad \forall N \in \mathbf{N}$$

e quindi, siccome $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{n^2 x} \int\limits_0^{nx} e^{-\tau^2} d\tau = \frac{1}{n}$, é

$$\liminf_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} \ge \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}, \quad \forall N$$

e quindi $\frac{f(x)}{x} \to_{x \to 0} +\infty$.

ESERCIZIO 3. $f(x,y) = \frac{x^{\frac{11}{3}} \log(x^2y^2) y^{\frac{4}{3}}}{x^6 + y^2}$ é di classe C^1 in (x,y) se $xy \neq 0$. La differenziabilitá nei punti degli assi diversi dall'origine, ovvero (x,y) con $xy = 0, x^2 + y^2 \neq 0$ si vede facilmente. Che le derivate parziali e direzionali in $(0,0)$ siano nulle si vede subito. Verifichiamo la differenziabilitá in $(0,0)$, ovvero che

$$\frac{x^{\frac{11}{3}} \log(x^2y^2) y^{\frac{4}{3}}}{(x^6 + y^2)\sqrt{x^2 + y^2}} \to 0$$

al tendere di $x^2 + y^2$ a zero. Fissato $\epsilon > 0$, si trova c_ϵ tale che

$$\left|\frac{x^{\frac{11}{3}} \log(x^2y^2) y^{\frac{4}{3}}}{(x^6 + y^2)\sqrt{x^2 + y^2}}\right| \le c_\epsilon \frac{|x|^{\frac{8}{3} - \epsilon} |y|^{\frac{4}{3} - \epsilon}}{(x^6 + y^2)}$$

Siccome, posto $z = x^3$, si ha

$$\frac{|z|^{\frac{8}{9} - \frac{\epsilon}{3}} |y|^{\frac{4}{3} - \epsilon}}{(z^2 + y^2)} \to 0$$

al tendere di $z^2 + y^2$ a zero perché $\frac{8}{9} - \frac{\epsilon}{3} + \frac{4}{3} - \epsilon > 2$, concludiamo che f é differenziabile in $(0,0)$ perché $z^2 + y^2$ va a zero se $x^2 + y^2$ va a zero.

ESERCIZIO 4. Possiamo supporre che, per una opportuna selezione di indici n_k, $f_{n_k}(0)$ converga e f'_{n_k} converga uniformemente in $[-1,1]$. Allora f_{n_k} converge uniformemente (vedi Tema 2).