ESERCITAZIONE 6: SIMULAZIONE ESONERO

Tiziana Raparelli

12/03/2008

1 ESERCIZI

ESERCIZIO 1:
Siano p e q due numeri reali maggiori di 1 e tali che $1/p + 1/q = 1$.
Dimostrare che per ogni coppia x, y di numeri non negativi, si ha

$$xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q} \quad .$$

ESERCIZIO 2:
Dimostrare la seguente versione generalizzata del teorema di Rolle:
Sia $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$, continua in $[a, +\infty)$, derivabile in $(a, +\infty)$ e tale che

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = f(a) \quad .$$

$\Rightarrow \exists c \in (a, +\infty)$ t.c. $f'(c) = 0$.

ESERCIZIO 3:
Stabilire se la seguente funzione è uniformemente continua nei domini indicati:

$$f(x) = x^2 e^{-\beta x} \quad , x \in (0, 1), \quad x \in (2, +\infty)$$

dove $\beta \in (0, 1)$.

ESERCIZIO 4:
Discutere al variare di a e b in $\mathbb{R}$ la derivabilità della seguente funzione

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 - bx & \text{se } 0 < x < 1 \\ \log x - 2 & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$

ESERCIZIO 5:
Sia dato un rettangolo con diagonale di lunghezza assegnata d. Facendolo

ruotare intorno ad uno dei suoi lati, si genera un cilindro. Calcolare i lati del rettangolo affinché il volume del cilindro sia massimo.

ESERCIZIO 6:

Tracciare un grafico qualitativo della seguente funzione:

$$h(x) = \arctan \frac{1}{x} + \log \sqrt{1 + x^2} \quad .$$

2 SOLUZIONI

ESERCIZIO 1:
Se $y = 0$, la disuguaglianza è ovvia. Supp. $y > 0$ fissato e consideriamo

$$f(x) = \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q} - xy$$

allora

$$f'(x) = x^{p-1} - y$$

e $f'(y^{\frac{1}{p-1}}) = 0$, inoltre $y^{\frac{1}{p-1}}$ risulta essere un punto di minimo per f e $f(y^{\frac{1}{p-1}}) = 0$ (segue dalle ipotesi fatte sui numeri p, q.) Perciò f è positiva per tutti gli x, y reali non negativi, che è quello che volevamo dimostrare.

ESERCIZIO 2:
Se $f = cost$ il risultato segue banalmente.
Altrimenti $\exists b > a$ t. c. $f(b) \neq f(a)$. Supp. $f(b) > f(a)$; dato che $f(x) \to f(a)$ per $x \to +\infty$, allora $\exists k \in (b, +\infty)$ t.c. $f(x) < f(b)$ per ogni $x > b$. E quindi nell'intervallo $[a, k]$ $f(x)$ ha un massimo, raggiunto per un punto interno dell'intervallo $(f(a), f(k) < f(b))$, cioè esiste $c \in (a, k) \subset (a, +\infty)$ t.c. $f'(c) = 0$.

ESERCIZIO 3:
In $(0, 1)$ è uniformemente continua essendo continua in $[0, 1]$ (grazie al teorema di Heine-Cantor). In $(2, +\infty)$ è uniformemente continua perché continua per $x = 2$ e per $x \to +\infty$ per il teorma dell'asintoto (orizzontale).

ESERCIZIO 4:
f è di classe C^∞ $\forall a, b \in \mathbb{R}$ in ogni punto del suo dominio, tranne che per $x = 1$. Per la continuità di f nel punto 1 deve essere

$$\lim_{x \to 1^-} = f(1) \quad ,$$

ossia

$$a - b = -2 \tag{1}$$

Per la derivabilità di f deve esistere finito il limite del rapporto incrementale in $x = 1$, cioè

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{a(1+h)^2 - b(1+h) - a + b}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{\log(1+h)}{h} \quad ,$$

da cui

$$1 = 2a - b \quad .$$

Mettendo a sistema con (1), si trovano per a il valore 3 e per b il valore 5.

ESERCIZIO 5:

Siano x e b due lati ortogonali del rettangolo, supponiamo che il rettangolo stia ruotando intorno a b. Il volume del cilindro è $V = \pi r^2 h$, nel nostro caso $h = x$, $r = b = \sqrt{d^2 - x^2}$, quindi vogliamo trovare il massimo della funzione $V(x) = \pi(d^2 - x^2)x$. Poiché

$$V'(x) = (\pi d^2 - 3x^2) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{d}{\sqrt{3}}$$

e $V' > 0 \forall x \in (0, \frac{d}{\sqrt{3}})$, segue che $\frac{d}{\sqrt{3}}$ è un punto di massimo per $V(x)$ ed il suo valore massimo è $V(d/\sqrt{3}) = \frac{2}{3\sqrt{3}} d^3$, volume del cilindro generato dal rettangolo di lati $x = \frac{d}{\sqrt{3}}$ e $b = \sqrt{\frac{2}{3}} d$.

ESERCIZIO 6:

Vedi soluzioni dell'esercitazione n.5 ($h(x)$ dell'esercizio 2).