ESERCITAZIONE 8: INTEGRAZIONE DELLE FUNZIONI RAZIONALI

Tiziana Raparelli

24/04/2008

1 ESERCIZI

ESERCIZIO 1:
Calcolare gli integrali indefiniti delle seguenti funzioni razionali:
(a) $\int \frac{3x-1}{x^2-x-6} dx$
(b) $\int \frac{x}{(x-3)^2} dx$
(c) $\int \frac{x^4-4x^3+3x^2+5x-4}{x^2-4x+4} dx$
(d) $\int \frac{x^2}{x^2-3x+4} dx$
(e) $\int \frac{x+2}{x^2+2} dx$
(f) $\int \frac{3x+2}{x(x^2+1)} dx$.
(g) $\int \frac{x}{(x-1)(x^2+1)} dx$

ESERCIZIO 2:
Calcolare il seguente integrale indefinito:

$$\int \frac{\sqrt{x}}{2+\sqrt{x}} dx \quad .$$

2 SOLUZIONI

ESERCIZIO 1:
(a) Le radici del denominatore sono $x_1 = -2$ e $x_2 = 3$, entrambe semplici (i.e. con molteplicità uguale a 1), dunque cerco due costanti $A, B \in \mathcal{R}$ tali che

$$\frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-3} = \frac{3x-1}{x^2-x-6} \quad ,$$

ossia

$$Ax - 3A + Bx + 2B = 3x - 1 \quad ,$$

da cui

$$\begin{cases} A + B = 3 \\ 2B - 3A = -1 \quad . \end{cases}$$

cioè $A = \frac{7}{5}$, $B = \frac{8}{5}$. Per cui l'integrale da calcolare è il seguente:

$$\frac{7}{5}\int \frac{1}{x+2}dx + \frac{8}{5}\int \frac{1}{x-3}dx = \frac{7}{5}\log|x+2| + \frac{8}{5}\log|x-3| + c \quad .$$

(b) La radice del denominatore ($x = 3$) è una radice doppia, perciò cerco due costanti A, B che soddisfino

$$\frac{A}{x-3} + \frac{B}{(x-3)^2} = \frac{x}{(x-3)^2} \quad ,$$

cioè

$$Ax - 3A + B = x \quad ,$$

soddisfatto se e solo se $A = 1$ e $B = 3$. Quindi l'integrale dato è:

$$\int \frac{dx}{x-3} + 3\int \frac{dx}{(x-3)^2} = \log|x-3| - \frac{3}{x-3} + c \quad .$$

(c) In questo caso il grado del polinomio a numeratore è maggiore del grado del denominatore, quindi per prima cosa faccio la divisione tra i due polinomi, ottenendo che

$$\frac{x^4 - 4x^3 + 3x^2 + 5x - 4}{x^2 - 4x + 4} = x^2 - 1 + \frac{x}{x^2 - 4x + 4} \quad ,$$

dunque devo calcolare il seguente integrale

$$\int (x^2 - 1)dx + \int \frac{x}{x^2 - 4x + 4}dx \quad .$$

Per il secondo integrale osservo che il denominatore è $(x-2)^2$, quindi utilizzando lo stesso procedimento usato per (b), posso riscrivere la funzione integranda nel seguente modo

$$\frac{x}{x^2-4x+4} = \frac{1}{x-2} + \frac{2}{(x-2)^2}$$

e quindi l'integrale dato è pari a

$$\frac{x^3}{3} - x + \log|x-2| - \frac{2}{x-2} + c \quad .$$

(d) Si esegue la divisione tra numeratore e denominatore e si ottiene

$$\int \frac{x^2}{x^2-3x+4} dx = \int dx + \int \frac{3x-4}{x^2-3x+4} = x + \int \frac{A}{x+1} dx + \int \frac{B}{x-4} dx$$

con $A = \frac{7}{5}$ e $B = \frac{8}{5}$. Perciò l'integrale cercato è il seguente:

$$x + \frac{7}{5}\log|x+1| + \frac{8}{5}\log|x-4| + c \quad .$$

(e)

$$\begin{aligned} \int \frac{x}{x^2+2} dx + 2\int \frac{1}{x^2+2} dx &= \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+2} + 2\int \frac{1}{x^2+2} dx \\ &= \frac{1}{2}\log(x^2+2) + \sqrt{2}\arctan(\frac{x}{\sqrt{2}}) + c \end{aligned}$$

(avendo usato: $\int \frac{dx}{k^2+x^2} = \frac{1}{k}\arctan(\frac{x}{k}) + c$).

(f) Il denominatore ha una radice reale semplice ($x_1 = 0$) e due radici complesse semplici ($x_{2,3} = \pm i$), dunque cerco delle costanti A, B, C tali che

$$\frac{3x+2}{x(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1}.$$

Risolvendo il sistema si ottiene

$$A = 2 \qquad B = -2 \qquad C = 3$$

e quindi l'integrale cercato è il seguente

$$2\log|x| - \log(1+x^2) + 3\arctan x + c \quad .$$

(g) Procedendo come in (f), troviamo per le costanti A, B, C i seguenti valori:

$$A = \frac{1}{2} \qquad B = -\frac{1}{2} \qquad C = \frac{1}{2}$$

e dunque

$$\int \frac{x}{(x-1)(x^2+1)} dx = \frac{1}{2} \log|x-1| - \frac{1}{4} \log(1+x^2) + \frac{1}{2} \arctan x + c \quad .$$

ESERCIZIO 2:
Integriamo per sostituzione, ponendo $\sqrt{x} = t$ ($\Leftrightarrow x = t^2$ e $dx = 2tdt$). Quindi dobbiamo calcolare

$$2 \int \frac{t^2}{2+t} dt = 2 \int (t-2) dt + 4 \int \frac{dt}{t+2} = t^2 - 4t + 4 \log|t+2| + c \quad .$$

Infine, risostituendo al posto di $t \to \sqrt{x}$, otteniamo per l'integrale cercato il seguente risultato:

$$x - 4\sqrt{x} + 4 \log(\sqrt{x} + 2) + c \quad .$$