ESERCITAZIONE DIECI: INTEGRALI DEFINITI E FORMULA DI TAYLOR

Tiziana Raparelli

15/05/2008

1 RICHIAMI DI TEORIA

Proposizione 1.1. *Sia $f \in C^0([a,b])$ e $g \in C^1([a,b])$, allora*

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = [F(x)g(x)]_a^b - \int_a^b F(x)g'(x)dx \quad .$$

dove $F(x)$ è un primitiva di $f(x)$ su $[a,b]$.

Proposizione 1.2. *Sia $f \in C^0([a,b])$ e $\phi \in C^1(J)$, $\phi(J) \subseteq [a,b]$. Allora*

$$\int_a^b f(t)dt = \int_{\phi^{-1}(a)}^{\phi^{-1}(b)} f(\phi(x))\phi'(x)dx \quad .$$

Calcolo delle aree:

Se $f(x)$ è continua e non negativa, allora

$$\int_a^b f(x)dx = A(T)$$

dove T è il trapezoide delimitato dal grafico di f, dall'asse delle x e dalle rette di equazione $x = a$ e $x = b$.

Se $f(x)$ assume valori di segno arbitrario, allora, posto

$$f^-(x) = \min\{0, f(x)\} \qquad f^+(x) = \max\{0, f(x)\}$$

si ha che

$$|f(x)| = f^+(x) - f^-(x)$$

e

$$\int_a^b |f(x)|dx = A(T^+) + A(T^-)$$

dove T^+ è la regione delimitata dal grafico di f^+, l'asse delle x e la retta di equazione $x = a$ e T_- è la regione piana delimitata da f^-, l'asse delle x e la retta di equazione $x = b$.

In generale, date due funzioni integrabili f, g con $g(x) \leq f(x)\ \forall x \in [a, b]$, la regione piana T delimitata dai loro grafici e dalle rette di equazione $x = a$, $x = b$ è la seguente:

$$T = \{(x, y) \in [a, b] \times \mathbb{R} : g(x) \leq y \leq f(x)\}$$

e in tal caso si ha

$$A(T) = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx$$

2 ESERCIZI

ESERCIZIO 1:
Calcolare i seguenti integrali definiti:

$$1)\ \int_{\frac{3}{2}\pi}^{\frac{5}{3}\pi} \left(\cos x + \frac{4}{3\sin x}\right)dx$$

$$2)\ \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1 + \sin x - \cos x}dx$$

$$3)\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\cos^2 x - 6\cos x + 9}dx$$

$$4)\ \int_0^{2\pi} |\sin x|dx \quad .$$

ESERCIZIO 2:
Calcolare l'area della regione piana T compresa tra la curva $y = \frac{1}{x}$, l'asse delle x e le rette di equazioni $x = a$ e $x = 3a$.

ESERCIZIO 3:
Calcolare l'area della regione piana T compresa tra la retta di equazione

$y = -2x + 3$ e la parabola di equazione $y = x^2$.

ESERCIZIO 4:
Calcolare l'area della regione piana T delimitata dal'ellisse di equazione $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$.

ESERCIZIO 5:
Scrivere il polinomio di Mc Laurin di ordine 12 della funzione

$$f(x) = \sin^2(x^3)$$

e calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2(x^3) - x^6}{2x^{12}} \quad .$$

ESERCIZIO 6:
Scrivere il polinomio di Taylor centrato in 0 fino all'ordine 3 della funzione:

$$g(x) = \sin(\log(1 + 2x)) \quad .$$

3 SOLUZIONI

ESERCIZIO 1:
1) Dobbiamo calcolare:

$$\int_{\frac{3}{2}\pi}^{\frac{5}{3}\pi} \cos x dx + \frac{4}{3}\int_{\frac{3}{2}\pi}^{\frac{5}{3}\pi} \sin x dx \quad .$$

Ricordando le formule parametriche per $\sin x$ e $\cos x$:

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2} \qquad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

effettuiamo la sostituzione $t = \tan\frac{x}{2}$, da cui

$$x = 2\arctan t \text{ e } dx = \frac{2}{1+t^2}dt \quad .$$

L'integrale dato diventa quindi:

$$\int_{-1}^{-\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{1}{t}dt = [\log|t|]_{-1}^{\frac{1}{\sqrt{3}}} = -\log\sqrt{3} \quad .$$

2) Sempre con la sosituzione $t = \tan\frac{x}{2}$, l'integrale dato diventa

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2} \quad & \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{1} \frac{1}{t(t+1)}dt = \frac{1}{2}\Big(\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{1} \frac{1+2t}{t(t+1)}dt - \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{1} \frac{2t}{t(t+1)}dt\Big) \\ = \quad & \frac{1}{2}[\log|t^2+t|]_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{1} - [\log|t+1|]_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{1} = \frac{1}{2}\log\left(\frac{1}{2}(1+\sqrt{3})\right) \quad . \end{aligned}$$

3) Ponendo $\cos x = t$, osserviamo che $\sin x dx = -dt$, perciò ci riconduciamo a calcolare

$$-\int_{1}^{0} \frac{1}{(t-3)^2}dt = \int_{0}^{1} \frac{1}{(t-3)^2}dt = \left[-\frac{1}{t-3}\right]_0^1 = \frac{1}{6} \quad .$$

4)

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |\sin x|dx = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \sin x dx = [-\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} + [\cos x]_{-\frac{\pi}{2}}^{0} = 2 \quad ,$$

(mentre $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = 0$).

ESERCIZIO 2:
$y = \frac{1}{x}$ è l'iperbole equilatera e nel primo quadrante (dove passano le rette $x = a$ e $x = 3a$, dato che $a > 0$) è positiva, quindi

$$A(T) = \int_a^{3a} \frac{1}{x} dx = \log 3 \quad .$$

ESERCIZIO 3:
I punti d'intersezione tra retta e parabola sono le soluzioni dell'equazione

$$x^2 - 2x + 3 = 0$$

ossia $x_1 = -3$ e $x_2 = 1$. Nell'intervallo $[-3, 1]$ la retta $y = -2x + 3$ è al di sopra della parabola $y = x^2$, quindi

$$T = \{(x, y) \in [-3, 1] \times \mathbb{R} : x^2 \leq y \leq -2x + 3\}$$

e

$$A(T) = \int_{-3}^{1} (-2x + 3 - x^2) dx = \left[-x^2 + 3x - \frac{x^3}{3} \right]_{-3}^{1} = \frac{32}{3} \quad .$$

ESERCIZIO 4:
Scriviamo y in funzione di x:

$$y = \pm \frac{2}{3} \sqrt{9 - x^2}$$

da cui $x \in [-3, 3]$. Quindi

$$T = \{(x, y) \in [-3, 3] \times \mathbb{R} : -\frac{2}{3}\sqrt{9 - x^2} \leq y \leq \frac{2}{3}\sqrt{9 - x^2}\}$$

e

$$A(E) = \frac{4}{3} \int_{-3}^{3} \sqrt{9 - x^2} dx$$

che si risolve con la sosituzione $x = 3 \sin t$, da cui

$$\frac{4}{3} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 9 \cos^2 t dt$$

che si calcola iterando due volte la formula per parti ed il risultato finale è

$$A(E) = 12 \big[\frac{1}{2}(t + \sin t \cos t) \big]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 6\pi \quad .$$

ESERCIZIO 5:
Dato che
$$\sin t|_{t_0=0} = t - \frac{t^3}{6} + o(t^4)$$
allora, ponendo $t = x^3$,
$$\sin^2(x^3)(= \sin(x^3) \cdot \sin x^3) = \left(x^3 - \frac{x^9}{6} + o(x^{10})\right)^2 = x^6 - \frac{1}{3}x^{12} + o(x^{13})$$
avendo trascurato tutte le potenze di x di grado maggiore di 12 ed avendo utilizzato le seguenti proprietà degli o piccoli:
$$\begin{array}{rcl} o(ax) & = & o(x) \\ o(x^m) \cdot o(x^n) & = & o(x^n) \cdot x^m = o(x^{n+m}) \\ o(x^m) + o(x^n) & = & o(x^n), \text{ se } n < m \quad . \end{array} \tag{1}$$
$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin^2(x^3) - x^6}{2x^{12}} = -\frac{\frac{1}{3}x^{12}}{2x^{12}} = -\frac{1}{6} \quad .$$

ESERCIZIO 6:
Poiché
$$\log(1+t)|_{t_0=0} = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + o(t^3)$$
e
$$\sin y|_{y_0=0} = y - \frac{y^3}{6} + o(y^4) \quad ,$$
allora, posto $y = \log(1+2x) = 2x - 2x^2 + \frac{8}{3}x^3 + o(x^3)$, l'espansione in serie di Taylor di nel punto 0 di $g(x)$ è data da
$$\sin(\log(1+2x))|_{x_0=0} = 2x - 2x^2 + \frac{8}{3}x^3 + o(x^3) - \frac{1}{6}\left(2x - 2x^2 + \frac{8}{3}x^3 + o(x^3)\right)^3$$
$$= \quad 2x - 2x^2 + \frac{4}{3}x^3 + o(x^3)$$
avendo usato le (1).