ESERCITAZIONE NOVE: INTEGRALI INDIEFINITI E INTEGRALI DEFINITI

Tiziana Raparelli

08/05/2008

1 INTEGRAZIONE DI ALCUNE FUNZIONI IRRAZIONALI

Vogliamo calcolare

$$\int f\left(x, \sqrt{g(x)}\right) dx$$

dove g è una funzione polinomiale di x di primo o di secondo grado.
Se $g(x) = ax + b$, allora basta porre $\sqrt{ax+b} = t$ e risolvere l'integrale indefinito in t con il metodo degli integrali fratti.

Se $g(x) = ax^2 + bx + c$, possiamo utilizzare una delle seguenti sostituzioni:
1) Se $a > 0$ possiamo porre $\sqrt{ax^2 + bx + c} = \pm\sqrt{a}x + t$ (cioè potendo scegliere per il termine $\sqrt{a}x$ sia il segno $+$ sa il segno $-$ indifferentemente).
2) Se $c > 0$ possiamo porre $\sqrt{ax^2 + bx_c} = \pm\sqrt{c} + tx$.
3) Se $a < 0$ e $\Delta > 0$ e $x_{1,2}$ sono le due radici di $g(x)$, $x_1 < x_2$, possiamo porre

$$\sqrt{-a\frac{x_2 - x}{x - x_1}} = t$$

La 1), la 2) e la 3) sono dette rispettivamente prima, seconda e terza sostituzione di Eulero.

2 GLI INTEGRALI DEFINITI, PRIME PROPRIETÀ

Ricordiamo di seguito alcune relazioni utili dell'integrale definito di una funzione:
Siano f, g de funzioni limitate ed integrabili in $[a, b]$, allora:

1) $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$ per ogni $c \in [a,b]$
2) $|\int_a^b f(x)dx| \leq \int_a^b |f(x)|dx$
3) $\int_a^b (\lambda f(x) + \mu g(x))dx = \lambda \int_a^b f(x)dx + \mu \int_a^b g(x)dx$
4) Se $f(x) \leq g(x)$ $\forall x \in [a,b]$, allora $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$
5)$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$
6)$\int_a^a f(x)dx = 0.$

Teorema 2.1 (TEOREMA DELLA MEDIA INTEGRALE)**.** *Sia* $m = \inf_{[a,b]} f$ *e* $M = \sup_{[a,b]} f$*, allora si ha*

$$m \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq M$$

In particolare, se f *è continua in* $[a,b]$*, esiste* $c \in [a,b]$ *tale che*

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = f(c)$$

3 ESERCIZI

ESERCIZIO 1:
Calcolare i seguenti integrali indefiniti di funzioni irrazionali

$$\int \frac{1}{x\sqrt{x-6}}dx$$

$$\int \frac{dx}{x+\sqrt{1+x^2}}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-3x+2}}dx$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-x+3}}$$

ESERCIZIO 2:
Dimostrare che non esistono funzioni continue, non negative e non identicamente nulle nell'intervallo $[0,1]$, il cui integrale definito sia nullo.

ESERCIZIO 3:
Siano f, g due funzioni continue in $[0,1]$ tali che $f(x) \leq g()x$ per ogni $x \in [0,1]$ e tali che $f(x_0) < g(x_0)$ per almeno un $x_0 \in [0,1]$. Dimostrare che

$$\int_0^1 f(x)dx < \int_0^1 g(x)dx \quad .$$

ESERCIZIO 4;
Sia f una funzione limitata e integrabile nell'intervallo $[0,5]$ tale che

$$\int_0^5 f(x)dx = 10 \quad .$$

Dimostrare che:
a) esiste almeno un punto $x_0 \in [0,5]$ t.c. $f(x_0) < 3$
b) se $f(x) \in C^0([0,5])$, allora esiste almeno un punto $x_0 \in [0,5]$ t.c. $f(x_0) = 2$.

ESERCIZIO 5:
Dimostrare che la funzione di Dirichlet, definita nel seguente modo:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{se } x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \end{cases}$$

non è integrabile nell'intervallo $[0,1]$.

4 SOLUZIONI

ESERCIZIO 1:
Per il calcolo del primo integrale, basta porre $\sqrt{x-6} = t$, grazie alla quale l'integrale dato diventa

$$2\int \frac{dt}{6+t^2} = \frac{2}{\sqrt{6}} \arctan(\frac{t}{\sqrt{6}}) + c$$

ossia

$$\sqrt{\frac{2}{3}} \arctan(\frac{\sqrt{x-6}}{\sqrt{6}}) + c \quad .$$

Per quanto riguarda il secondo integrale, ponendo $\sqrt{1+x^2} = t - x$ (prima sostituzione di Eulero), ci riconduciamo al calcolo di

$$\int \frac{t^2+1}{2t^3} dt = \frac{1}{2} \log|t| - \frac{1}{4} t^{-2}$$

ossia l'integrale dato è

$$\frac{1}{2} \log|x + (1+x^2)| - \frac{1}{4} \frac{1}{(x+\sqrt{1+x^2})^2} + c \quad .$$

Per il terzo integrale, effettuando la seconda sostituzione di Eulero:

$$\sqrt{x^2-3x+2} = tx + \sqrt{2}$$

($t = \frac{\sqrt{x^2+3x+2}-\sqrt{2}}{x}$) si perviene a

$$x = \frac{3+\sqrt{2}t}{1-t^2}$$

e dunque, svolgendo i calcoli e le opportune semplificazioni, rimane da calcolare

$$\int \frac{dt}{1-t^2}$$

cioè

$$\frac{1}{2}\left(\int \frac{1}{1-t} dt - \int \frac{1}{1+t} dt\right)$$

e quindi

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-3x+2}} dx = \frac{1}{2} \log|1 - \frac{\sqrt{x^2-3x+2}-\sqrt{2}}{x}| - \frac{1}{2} \log|1 + \frac{\sqrt{x^2-3x+2}-\sqrt{2}}{x}| + c$$

ESERCIZIO 2:
Sia $f \in C^0([0,1])$, con $f(x) \geq 0 \forall x \in [0,1]$e t.c. $\int_0^1 f(x)dx = 0$. Supp. per assurdo che $\exists x_0 \in [0,1]$ t.c. $f(x_0) > 0$. Per il teorema di permanenza del segno, esiste un intorno I di x_0 in cui $f(x) \geq \frac{f(x_0)}{2}$, $\forall x \in I$. Sia $I = \{x_0 - \delta, x_0 + \delta\}$ $(\delta > 0)$. Per la proprietà 1) degli integrali definiti e per il teorma della media integrale, valgono le seguenti disuguaglianze:

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x)dx &= \int_0^{x_0-\delta} f(x)dx + \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f(x)dx + \int_{x_0+\delta}^1 f(x)dx \\ &\geq \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f(x)dx \geq \frac{f(x_0)}{2}(2\delta) > 0\end{aligned}$$

(essendo $\frac{f(x_0)}{2}$ l'estremo inferiore di f in I), da cui l'assurdo.

ESERCIZIO 3:
Basta osservare che la funzione $f(x) - g(x)$, per l'esercizio precedente, ha integrale, esteso all'intervallo $[0,1]$, strettamente positivo.

ESERCIZIO 4:
a) Supp. per assurdo $f(x) \geq 3$ per ogni $x \in [0,5]$, allora risulterebbe

$$\int_0^5 f(x)dx \geq \int_0^5 3dx = 15 \quad .$$

b) Per il teorema della media, essendo f continua, esiste $x_0 \in [0,5]$ t.c.

$$10 = \int_0^5 f(x)dx = 5f(x_0)$$

da cui la tesi.

ESERCIZIO 5:
Basta applicare la definizione di integrale definito di una funzione f in un dato intervallo I: nel nostro caso in ogni intervallo $[x_{k-1}, x_k]$ di una suddivisione qualsiasi di $[0,1]$ (della forma $\{x_i\}_{i=0\ldots n}$) cadono infiniti numeri razionali ed infiniti numeri irrazionali, perciò si ha

$$\inf_{[x_{k-1},x_k]} f(x) = 0 \qquad \sup_{[x_{k-1},x_k]} f(x) = 1 \quad .$$

Dunque ogni somma integrale inferiore è nulla, mentre ogni somma integrale superiore vale 1.