Cognome e nome ____________________

SECONDO ESONERO DI AM1C
29 MAGGIO 2008

**Esercizio 1.**

Calcolare i seguenti integrali

$$\int \frac{\sin x}{2-\cos^2 x}dx \qquad , \qquad \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x\log^2 x}dx \quad .$$

Verificare se il valore del secondo integrale corrisponde all'area della regione di piano compresa tra la funzione $x\log^2 x$ ristretta all'intervallo $[0, \frac{1}{2}]$ e l'asse delle $x$.

Cognome e nome ____________________

SECONDO ESONERO DI AM1C
29 MAGGIO 2008

**Esercizio 2.**
1) Enunciare e dimostrare il toerema fondamentale del calcolo integrale.
2) Calcolare il seguente limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\left(\int_0^{x^2} (\cos^2(\sqrt{t}) - \sin(2t))dt\right) - x^2 + 3x^3}{(1+2x)^{\frac{3}{2}} - 3e^x + 2} \quad .$$

Cognome e nome ____________________

SECONDO ESONERO DI AM1C
29 MAGGIO 2008

**Esercizio** 3.
Discutere al variare di $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ la convergenza del seguente integrale improprio

$$\int_0^{+\infty} (1 - \frac{\sin x}{x})^{\alpha} \frac{1}{\arctan(\frac{1}{x^{|\beta|}})} dx \quad .$$

Cognome e nome ____________________

SECONDO ESONERO DI AM1C
29 MAGGIO 2008

Scrivere la *formula di Taylor con resto di Lagrange* per una funzione reale definita su un intervallo $I \subset \mathbb{R}$ (specificando tutte le ipotesi) ed utilizzarla per dare una stima del numero di Nepero $e$ con una precisione migliore di 0.03.

Cognome e nome ____________________

SECONDO ESONERO DI AM1C
29 MAGGIO 2008

**Esercizio 5.**
1) Dimostrare che non esistono funzioni continue $f : [0,2] \to \mathbb{R}$, non identicamente nulle, tali che $f(x) \geq 0$ per ogni $x \in [0,2]$, il cui integrale definito sia nullo.
2) Sia f continua tale che

$$\int_0^2 f(x)dx = 4 \quad .$$

Dimostrare che esiste un punto $x_0 \in (0,2)$ tale che $f(x_0) = 2$.

# 1 SOLUZIONI

**Esercizio** 1

Per calcolare il primo integrale effettuiamo il cambio di variabile $\cos x = t$, da cui segue $dt = -\sin x dx$ e dunque ci siamo ricondotti a calcolare

$$-\int \frac{1}{2-t^2} dt$$

che è l'integrale di una funzione razionale il cui denominatore ammette due radici semplici reali. Quindi si cercano $A, B \in \mathbb{R}$ tali che

$$\frac{1}{t^2-2} = \frac{A}{t-\sqrt{2}} + \frac{B}{t+\sqrt{2}}$$

ossia $A = -B = \frac{1}{2\sqrt{2}}$

perciò l'integrale dato è pari a

$$\frac{1}{2\sqrt{2}} \log \left| \frac{\cos x - \sqrt{2}}{\cos x + \sqrt{2}} \right| + c$$

avendo infine risostituito $\cos x$ a $t$.

Il secondo integrale è un integrale improprio, che calcoliamo ponendo $t = \log x$, da cui $x = e^t$ e dunque

$$\int_{-\infty}^{\log \frac{1}{2}} \frac{1}{t^2} dt = -\frac{1}{t}\Big|_{t=\log\frac{1}{2}} + \lim_{t \to -\infty} \frac{1}{t} = \frac{1}{\log 2} \quad .$$

Essendo la funzione $x^2 \log x$ positiva in $[0, \frac{1}{2}]$, l'area richiesta è pari al suo integrale definito calcolato fra $[0, \frac{1}{2}]$. Tale integrale si risolve con una doppia integrazione per parti ed il risultato è

$$\frac{1}{8} \log 2(1 + \log 2) + \frac{1}{16} \neq \frac{1}{\log 2}$$

perciò il numero prima trovato non rappresenta l'area della regione richiesta.

**Esercizio** 2

2) Applichiamo il teorema di De l'Hospital (essendo una forma indeterminata del tipo $[\frac{0}{0}]$): per il teorema fondamentale del calcolo integrale la derivata del numeratore è la funzione

$$f'(x) = (\cos^2 x - \sin(2x^2))2x - 2x + 9x^2$$

quindi studiamo

$$\begin{aligned} & \lim_{x\to 0} \frac{(\cos^2 x - \sin(2x^2))2x - 2x + 9x^2}{3(1+2x)^{\frac{1}{2}} - 3e^x} \\ = & \lim_{x\to 0} \frac{2x(1 - x^2 - 2x^2 + o(x^3)) - 2x + 9x^2}{3(1 + x - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)) - 3(1 + x + x^2 + o(x^2))} = -3 \end{aligned}$$

avendo sviluppato con la formula di Mac Laurin le funzioni $\cos^2 x$ fino al second'ordine, $\sin(2x^2)$ al primo ordine, $\sqrt{1+2x}$ e $e^x$ al secondo ordine.

**Esercizio** 3

Spezziamo l'intervallo d'integrazione nei due intervalli $(0, 1]$ e $[1, \infty]$. Nel primo intervallo $\arctan \frac{1}{x^{|\beta|}}$ è una quantità limitata e positiva per ogni $\beta \in \mathbb{R}$, perciò

$$\int_0^1 (1 - \frac{\sin x}{x})^{\alpha} \frac{1}{\arctan(\frac{1}{x^{|\beta|}})} dx \sim \int_0^1 \Big(1 - \frac{\sin x}{x}\Big)^{\alpha} dx$$

che si comporta come

$$\int_0^1 (x^2)^{\alpha} dx$$

il quale converge se e solo se $\alpha > -\frac{1}{2}$.

Per $x$ molto grandi invece $\arctan \frac{1}{x^{|\beta|}} \sim \frac{1}{x^{|\beta|}}$ e $\frac{\sin x}{x} \to 0$, quindi

$$\int_1^{+\infty} (1 - \frac{\sin x}{x})^{\alpha} \frac{1}{\arctan(\frac{1}{x^{|\beta|}})} dx \sim \int_1^{+\infty} x^{|\beta|} dx$$

che diverge per ogni $\beta$, dunque l'integrale dato diverge $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

**Esercizio** 4

La formula di Taylor con resto di Lagrange di $e^x$ centrata in $x_0 = 0$ è la seguente

$$e^x = \Sigma_0^n \frac{x^k}{k!} + \frac{e^{\zeta(x)}}{(k+1)!} x^{k+1} = \Sigma_0^n \frac{x^k}{k!} + R_n \quad ,$$

dove $\zeta(x)$ è un punto appartenente a $(0,1)$. Ponendo $x = 1$, otteniamo l'uguaglianza

$$e = \Sigma_0^n \frac{1}{k!} + \frac{e^{\zeta}}{(k+1)!}$$

dunque

$$|e - \Sigma_0^n \frac{1}{k!}| \leq |R_n| \quad .$$

Quindi per stimare $e$ con la precisione richiesta cerchiamo il primo $n$ per il quale $|R_n| < 3 \cdot 10^{-2}$: tale $n$ è 4, infatti

$$|R_4| < \frac{3}{5!} = 2.5 \cdot 10^{-2} < 3 \cdot 10^{-2}$$

(mentre $|R_3| < \frac{3}{4!} < 1.3 \cdot 10^{-1}$), dunque il numero che approssima $e$ con la precisione richiesta è $P_4(0,x)|_{x=1} = 2.708$.

**Esercizio** 5

1) Supp. per assurdo che esista un $x_0 \in [0,2]$ tale che $f(x_0) > 0$ e $\int_0^2 f(x)dx = 0$. Essendo $f$ continua, per il teorema della permanenza del segno, esisterà un intorno di $x_0$ (ad es. $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$) t.c. $f(x) \geq \frac{f(x_0)}{2}$, quindi

$$\int_0^2 f(x)dx \geq \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f(x)dx \geq \inf_{(x_0-\delta, x_0+\delta)} f \cdot 2\delta = \delta f(x_0) > 0$$

2) Essendo $f$ continua, per il teorema della media integrale esiste $c \in [0,2]$ tale che

$$\int_0^2 f(x)dx = 4 = 2 \cdot f(c) \quad .$$