Cognome e nome ____________________

PRIMO ESONERO DI AM1C
10 APRILE 2008

Esercizio 1.
(a) Enunciare e dimostrare il teorema di Lagrange
(b) Dimostrare la seguente identità:

$$\arctan x = \arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

Cognome e nome ____________________

PRIMO ESONERO DI AM1C
10 APRILE 2008

Esercizio 2.
(a) Dimostrare che una funzione lipschitziana in I è uniformemente continua in I.
(b) Stabilire se la seguente funzione è uniformemente continua nei domini indicati:

$$\frac{|\cos x - 1|}{x} e^{x^2} \text{ in } (0,1) \text{ e in } (3,+\infty)$$

Cognome e nome ____________________

PRIMO ESONERO DI AM1C
10 APRILE 2008

Esercizio 3.
(a) Studiare al variare di $a, b \in \mathbb{R}$ la derivabilità della seguente funzione:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \cos \frac{1}{x} + 2 & \text{se } x > 0 \\ ax + b & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$$

(b) Dopo aver dato la definizione di funzione di classe C^k in un punto, verificare se $f \in C^1(\{0\})$.

Cognome e nome ____________________

PRIMO ESONERO DI AM1C
10 APRILE 2008

Esercizio 4.
Tra tutti i triangoli di base assegnata ed uguale area, trovare quello di perimetro minimo.

Cognome e nome ____________________

PRIMO ESONERO DI AM1C
10 APRILE 2008

Esercizio 5.
(a) Data la funzione

$$f(x) = xe^{\frac{1}{1+\log x}}$$

determinare: insieme di esistenza e di derivabilità, limiti ed eventuali asintoti, derivata prima, eventuali massimi e minimi. Tracciarne un grafico qualitativo.
(b) $f(x)$ è integrabile nell'intervallo $[2, 4]$? Perché?

1 SOLUZIONI

Esercizio 1
(b) Sia
$$f(x) = \arctan x - \arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$
allora
$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} \equiv 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$
da cui segue (come conseguenza del teorema di Lagrange) che $f = cost$ in $\mathbb{R}$. Per determinare il valore della costante, basta calcolare il valore di f in un qualsiasi punto (ad esempio, per $x = 0$), e $f(0) = 0$, da cui segue la tesi.

Esercizio 2

(a) f è lipschitziana in I se $\exists L \in \mathbb{R}_+$ t.c. $\forall x, y \in I$,
$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$$
Quindi $\forall \epsilon > 0$ basta porre $\delta = \epsilon/L$ ed usare la lipschitzianità di f per dimostrare che $\forall x, y \in I$ t. c. $|x-y| < \delta$, segue $|f(x) - f(y)| < L\delta = \epsilon$, cioè f è uniformemente continua in I.
(b) Osserviamo innanzi tutto che, essendo $|\cos x| < 1$, $f(x) = \frac{1-\cos x}{x} e^{x^2}$. Ora,
$$lim_{x \to 0^+} f(x) = lim_{x \to 0^+} \frac{1-\cos x}{x^2} x e^{x^2} = \frac{1}{2} \cdot 0 = 0$$
e
$$lim_{x \to 1^-} f(x) = (1 - \cos 1)e$$
cioè f è continua in $[0, 1]$ e dunque, per il teorema di Heine-Cantor, f è ivi uniformemente continua (perciò è uniformemente continua anche la restrizione di f a $(0, 1)$).
Nell'intervallo $(3, +\infty)$, f non è uniformemente continua,

infatti scegliendo ad esempio le successioni di punti $x_k^m = 2k\pi$ e $x_k^M = 2k\pi + \frac{1}{k}$, abbiamo che

$$\lim_{k\to\infty} |x_k^M - x_k^m| = 0$$

mentre

$$\lim_{k\to\infty} |f(x_k^M) - f(x_k^m)| = +\infty \quad .$$

Esercizio 3

(a) f è continua e derivabile per ogni $a, b \in \mathbb{R}$ in ogni punto del suo dominio, tranne nel punto 0, perché è somma di funzioni continue nel loro dominio. Per la continuità in 0 deve essere

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) \quad \Leftrightarrow b = 2 \quad .$$

Per la derivabilità in 0 deve esistere finito il limite del rapporto incrementale in 0, ossia deve essere

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h}$$

che nel nostro caso diventa

$$a = \lim_{h\to 0^-} h \cos(\frac{1}{h})$$

cioè $a = 0$.

(b) f non è di classe C^1 nel punto 0, infatti

$$f'(x) = \begin{cases} 2x\cos\frac{1}{x} + \sin\frac{1}{x} & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$$

e $\lim_{x\to 0^+} f'(x)$ non esiste.

Esercizio 4

Assegnate la base del triangolo b e la sua area A, è fissata anche l'altezza h ($h = \frac{2A}{b}$). h divide b in due parti: siano x

e $b-x$ le loro lunghezze. Allora il perimetro è esprimibile in funzione di x come

$$P(x) = b + \sqrt{x^2+h^2} + \sqrt{(b-x)^2+h^2}$$

e per trovare il suo valore minimo studiamo il segno della sua derivata:

$$P'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+h^2}} - \frac{(b-x)}{\sqrt{(b-x)^2+h^2}}$$

e

$$P'(x) \geq 0 \quad \Leftrightarrow x \geq \frac{b}{2} \quad ,$$

perciò fra tutti i triangoli dati, quello con perimetro minimo è il triangolo isoscele ($a = c = \sqrt{(\frac{b}{2})^2 + h^2}$).

Esercizio 5

(a)

$$\mathrm{Dom}(f) = (0, \frac{1}{e}) \cup (\frac{1}{e}, +\infty)$$

ASINTOTI:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0 = \lim_{x\to \frac{1}{e}^-} f(x), \qquad \text{e} \lim_{x\to \frac{1}{e}^+} f(x) = +\infty$$

quindi la retta di equazione $x = \frac{1}{e}$ è asintoto verticale per f (da destra).

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$$

quindi f non ammette asintoti orizzontali, e nemmeno asintoti obliqui, come si vede calcolando i due limiti

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = 1 \text{ ma } \lim_{x\to +\infty} (f(x) - x) = +\infty \quad .$$

MASSIMI E MINIMI:

$$f'(x) = e^{\frac{1}{1+\log x}} \Big(1 - \frac{1}{(1+\log x)^2}\Big)$$

e $\mathrm{Dom}(f') = \mathrm{Dom}(f)$.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = e^{-2} \quad ;$$

dallo studio del segno di f' risulta essere 1 un punto di minimo relativo per f ($f(1) = e$) e e^{-2} punto di massimo relativo ($f(e^{-2}) = e^{-3}$).
(b) $f(x)$ nell'intervallo chiuso e limitato $[2, 4]$ è integrabile perché continua (o equivalentemente perché è monotona).