ESERCITAZIONE 5: STUDIO QUALITATIVO DELLE FUNZIONI

Tiziana Raparelli

28/03/2008

1 CONOSCENZE E PREREQUISITI

Definizione 1.1. *Un punto $x_0 \in A$ è di massimo [minimo] locale (o relativo) per una funzione f se esiste un intorno di x_0 in cui x_0 è punto di massimo [minimo] per f.*

Proposizione 1.1. *Sia f derivabile in A e $x_0 \in A$. Condizione necessaria affinché x_0 sia punto di massimo o minimo locale per f è che $f'(x_0) = 0$.*

Proposizione 1.2. *Se $f : A \to \mathbb{R}$ è derivabile in A ed $f'(x_0) = 0$ in qualche punto x_0 interno ad A, allora, detto $I(x_0)$ un intorno di x_0, valgono le seguenti proprietà:*
i) Se $f' > 0[< 0]\forall x \in I_-(x_0)$ e $f' < 0[> 0]\forall x \in I_+(x_0)$, allora x_0 è punto di massimo [minimo] locale per f.
ii) Se f' non cambia di segno in $I(x_0)$, allora x_0 non è né di massimo né di minimo.

2 ESERCIZI

ESERCIZIO 1:
Determinare i punti di massimo e minimo relativi e assoluti di

$$f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}$$

nell'intervallo $[-4, 3]$.

ESERCIZIO 2:
Tracciare un grafico qualitativo delle seguenti funzioni:

$$f(x) = \sqrt{|x^2 - 10x|} \quad ,$$

$$g(x) = (2x^2 + 3x)e^{\frac{1}{x}} \quad ,$$

$$h(x) = \arctan \frac{1}{x} + \log \sqrt{1 + x^2} \quad .$$

ESERCIZIO 3:
Fra tutti i coni inscritti in una sfera di raggio R deterinare quello per il quale è massimo il rapporto tra il suo volume e quello della sfera.

3 SOLUZIONI

ESERCIZIO 1:
Essendo f continua in $[-4, 3]$, per il teorema di Weierstrass sicuramente f ammette in tale intervallo massimo e minimo assoluto. Per quanto riguarda i punti di massimo e di minimo relativi calcoliamo f':

$$f'(x) = \frac{x^3 + 2x}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}$$

e $f' = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Studiando il segno della derivata notiamo che $x = 0$ è punto di minimo locale e f(0)=0. Inoltre sia -4 che 3 sono punti di massimo locale per f. Inoltre $f(-4) = \frac{16}{\sqrt{17}} > f(3) = \frac{9}{\sqrt{10}} > 0$, dunque 0 è anche punto di minimo assoluto e -4 è punto di massimo assoluto per f .

ESERCIZIO 2:
1) $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$, $f(x) \geq 0 \forall x \in \mathbb{R}$ e $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 10$.
Asintoti:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \pm 1$$

e

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) \mp x = \mp 5$$

dunque la funzione ammette come asintoti obliqui le rette di equazione $y = x - 5$ (per $x \to +\infty$) e $y = 5 - x$ (per $x \to -\infty$).
Massimi e minimi relativi:

$$f'(x) = \mathrm{sgn}(x^2 - 10x)\frac{x-5}{\sqrt{|x^2 - 10x|}}$$

e $\mathrm{Dom}(f') = \mathbb{R} - \{0, 10\}$. In quei punti f presenta delle cuspidi, mentre in $x = 5$ ($f'(5) = 0$), f ha un massimo relativo.

2) $\mathrm{Dom}(g) = \mathbb{R} - \{0\}$, $g = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = -\frac{2}{3}$ e $g > 0$ in $(-\infty, -\frac{3}{2}) \cup (0, +\infty)$.
Asintoti:
$\lim_{x\to 0^+} g(x) = +\infty$, mentre $\lim_{x\to 0^-} g(x) = 0$, quindi $x = 0$ è un asintoto verticale per g (da destra).

$$\lim_{x\to\pm\infty} g(x) = +\infty$$

e

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{g(x)}{x}=+\infty$$

quindi g non ammette né asintoti orizzontali né obliqui.
Massimi e minimi relativi:

$$g'(x)=(4x+1-\frac{3}{x})e^{\frac{1}{x}}=0\Leftrightarrow x=-1\vee x=\frac{3}{2}\quad .$$

Studiando il segno di g' troviamo che sono entrambi punti di minimo locale per g (inoltre $x=-1$ è anche punto di minimo assoluto).
3) $\mathrm{Dom}(h)=\mathbb{R}-\{0\}$, $h>0\Leftrightarrow x>0$.
Asintoti:

$$\lim_{x\to 0^{\pm}}h(x)=\pm\frac{\pi}{2}$$

quindi non ci sono asintoti verticali.

$$\lim_{x\to\pm\infty}h(x)=+\infty$$

e

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{h(x)}{x}=0$$

dunque h non ammette né asintoti orizzontali né obliqui.
Massimi e minimi relativi:

$$h'(x)=\frac{x-1}{x^2+1}=0\Leftrightarrow x=1\quad .$$

Dallo studio del segno si evince che $x=1$ è punto di minimo relativo per h.

ESERCIZIO 3:
Siano r il raggio di base del cono e h l'altezza del cono. Vogliamo trovare il massimo di:

$$\frac{V_c}{V_s}=\frac{r^2h}{4R^3}$$

Detto x l'angolo al centro tra l'asse del cono e il raggio della sfera che interseca la circonferenza di base del cono, valgono allora le seguenti relazioni:

$$\begin{aligned} r &= R\sin x \\ h= &= R(1+\cos x)\quad . \end{aligned}\tag{1}$$

Vogliamo dunqe trovare il massimo dela funzione

$$f(x) = \frac{\sin^2 x(1 + \cos x)}{4}$$

Calcoliamo f':

$$f'(x) = \frac{1}{4}\sin x(3\cos^2 x + 2\cos x - 1)$$

e $f' = 0 \Leftrightarrow x =, 0, \pi, \arccos \frac{1}{3}$. Il massimo di f è raggiunto per $x = \arccos \frac{1}{3}$, cioè (sosituendo in (1)) quando l'altezza del cono h è pari a $\frac{4}{3}$ il raggio R della sfera ad esso circoscritta.