ESERCITAZIONE 4: I NUMERI COMPLESSI

Tiziana Raparelli

19/03/2008

1 DEFINIZIONI E PROPRIETÀ

Vogliamo risolvere l'equazione

$$x^2 + 1 = 0,$$

estendiamo dunque l'insieme dei numeri reali, introducendo l'unità immaginaria i, definita nel seguente modo:

$$i^2 = -1.$$

Definizione 1.1. *i è l'unità immaginaria e*

$$\mathbb{C} := \{z = a + ib | a, b \in \mathbb{R}\}$$

è l'insieme dei numeri complessi.
Il numero a è la parte reale di z ($a = \Re(z)$) e b è la parte immaginaria di z ($b = \Im(z)$).
Gli elementi di $\mathbb{C}$ tali che a=0 sono i numeri immaginari puri.

Osservazione 1.1.
$$\mathbb{R} = \{a + i \cdot 0\} \subset \mathbb{C}.$$

Introduciamo s $\mathbb{C}$ le seguenti operazioni di somma e prodotto:
Dati $z_1 = a_1 + ib_1$, $z_2 = a_2 + ib_2$, allora:

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2) \\ z_1 \cdot z_2 &= (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(a_1 b_2 + b_1 a_2). \end{aligned}$$

L'insieme $\mathbb{C}$ dotato dele operazioni $(+, \cdot)$ è un campo.

Definizione 1.2. *Sia $z = a + ib$, il modulo di z è:*

$$|z| := \sqrt{a^2 + b^2},$$

il complesso coniugato di z è il numero

$$\bar{z} := a - ib.$$

Proposizione 1.1. *Valgono le seguenti proprietà:*
i) $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z = \bar{z}$
ii) $z\bar{z} = |z|^2$
iii) $\Re(z) = \frac{z+\bar{z}}{2}, \qquad \Im(z) = \frac{z-\bar{z}}{2i}$
iv)$\forall z \in \mathbb{C} - \{0\}$ *si ha*

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}.$$

2 IL PIANO DI GAUSS E LA RAPPRESENTAZIONE POLARE

Ogni $z \in \mathbb{C}$ può essere rappresentato come come un punto del piano (piano di Gauss) di coordinate $(\Re(z), \Im(z))$.

Osservazione 2.1. *$\bar{z}$ nel piano di Gauss è il punto simmetrico a z rispetto all'asse delle x e $|z|$ è la distanza di z dall'origine.*
Sia $\rho = |z|$, allora tutti i numeri complessi di modulo fissato ρ sono i punti dela circonferenza centrata nell'origine di raggio ρ.

$\forall z \in \mathbb{C} - \{0\}$ vale la seguente rappresentazione (rappresentazione polare - o trigonometrica-)

$$z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$$

dove θ (argomento di z) è l'angolo, misurato in radianti, formato dalla semiretta uscente dall'origine e passante per il punto z, con il semiasse reale positivo (con le solite convenzioni di verso).
Inoltre, definito $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$, $\forall\theta \in \mathbb{R}$, segue che ogni numero complesso non nullo può essere scritto (in forma esponenziale) nel seguente modo:

$$z = \rho e^{i\theta}.$$

Proposizione 2.1 (Formula di de Moivre)**.** *Sia $z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$, allora si ha*

$$z^n = \rho^n\big(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)\big).$$

Definizione 2.1. *Un numero complesso z si dice radice n-esima di w se $z^n = w$ (con $n \in \mathbb{N}^+$).*

Teorema 2.1. *$\forall n \in \mathbb{N}^+$, ogni $w \in \mathbb{C} - \{0\}$, $w = \rho e^{i\theta}$ ha esattamente n radici n-esime distinte la cui espressione è la seguente:*

$$z_k = \sqrt[n]{\rho} e^{i\left(\frac{\theta+2\pi k}{n}\right)} \quad , \text{ con } k = 0, 1 \ldots n-1 \quad .$$

Teorema 2.2 (Teorema fondamentale dell'algebra)**.** *Se $p(z)$ è un polinomio di grado n a coefficienti complessi, esso ha esattamente n radici complesse (contate con la loro molteplicità algebrica).*

3 ESERCIZI

ESERCIZIO 1:
Calcolare i seguenti numeri complessi:

$$z_1 = \frac{4+5i}{3i+2} \quad ,$$

$$z_2 = \frac{2+i-(\overline{3-i})}{3i+1} \quad .$$

ESERCIZIO 2:
Scrivere in forma esponenziale i seguenti numeri complessi:

$$z_1 = 3i \qquad z_2 = 2 - 2\sqrt{3}i \qquad z_3 = -16 \quad .$$

ESERCIZIO 3:
Scrivere l'espressione generale delle radici n-esime dell'unità ed esplicitarle per $n = 3$.

ESERCIZIO 4:
Risolvere le seguenti equazioni in $\mathbb{C}$:

$$\begin{aligned} &(1) \quad z^2 + z + 1 = 0 \\ &(2) \quad z^3 = \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{i}{3} \\ &(3) \quad (z-4i)^5 = 1 + i \quad . \end{aligned}$$

4 SOLUZIONI

ESERCIZIO 1:

$$z_1 = (4+5i)(3i+2)^{-1} = \frac{1}{13}\frac{4+5i}{2-3i} = \frac{23}{13} - i\frac{2}{13} \quad ,$$

$$z_2 = -\frac{1}{3i+1} = -\frac{1}{10} + i\frac{3}{10} \quad .$$

ESERCIZIO 2:
Sia $\rho = |z_1| = 3$, posto $\theta = arg(z_1)$, allora deve essere:

$$\begin{cases} \rho\cos\theta = \Re(z_1) \\ \rho\sin\theta = \Im(z_1) \end{cases}$$

cioè $\theta = \frac{\pi}{2}$, dunque $z_1 = 3e^{i\frac{\pi}{2}}$.
Per z_2, $\rho = 4$ e θ è la soluzione di

$$\begin{cases} \rho\cos\theta = 2 \\ \rho\sin\theta = -2\sqrt{3} \end{cases}$$

cioè $z_2 = 4e^{i\frac{5}{3}\pi}$. Analogamente per z_3 troviamo la seguente espressione: $-16 = 16e^{i\pi}$.

Osservazione 4.1. *I numeri reali positivi hanno tutti argomento nullo, quelli negativi hanno argomento pari a π.*

ESERCIZIO 3:
Per il teorema 2.1, l'equazione

$$z^n = 1$$

ha esattamente n radici n-esime, la cui forma è la seguente:

$$z_k = e^{i\frac{2k\pi}{n}} \qquad , \text{ con } 0 \le k \le n-1 \quad .$$

Per $n = 3$, otteniamo le tre radici terze dell' unità, che sono le seguenti:

$$z_1 = 1 \quad , z_2 = e^{i\frac{2}{3}\pi} \quad , z_3 = e^{i\frac{4}{3}\pi} \quad .$$

ESERCIZIO 4:
(1) L'equazione $z^2 + z + 1 = 0$ ammette le due soluzioni complesse:

$$z_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2} \quad .$$

(2) Le radici terze del numero $\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{i}{3}$ sono:

$$z_k = \sqrt[3]{\frac{2}{3}} e^{i \frac{\frac{\pi}{6} + 2k\pi}{3}} \quad , \text{ con } k + 0, 1, 2$$

infatti $|\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{i}{3}| = \frac{2}{3}$ e $\arg(\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{i}{3}) = \frac{\pi}{6}$.
(3) Per risolvere l'equazione, effettuiamo iil cambio di variabile $T = z - 4i$, cosicchè troviamo le seguenti soluzioni:

$$T_k = \sqrt[10]{2} e^{i \frac{\frac{\pi}{4} + 2k\pi}{5}} \quad \text{con } k = 0, 1, \ldots 4 \quad .$$

Per trovare le z_k che risolvono l'equazione dobbiamo riscrivere le T_k in forma algebrica e poi ricordare che $\forall k$, $z_k = T_k + 4i$.

Osservazione 4.2. *Le radici n-esime di un numero complesso di modulo ρ rappresentate nel piano di Gauss sono i vertici di un ennagono regolare inscritto nella circonferenza centrata nell'origine di raggio ρ.*