ESERCITAZIONE 1: UNIFORME CONTINUITÀ

Tiziana Raparelli

28/02/2008

1 ESERCIZI:

Teoremi e Criteri impiegati:
Sia $f : I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione lipschitziana in I. Allora f è uniformemente continua in I.

Teorema 1.1 (Teorema della farfalla)**.** *Se $f : [0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ è uniformemente continua, allora $\exists A, B \in \mathbb{R} : |f(x)| \leq Ax + B, \forall x \in dom(f)$.*

Teorema 1.2 (Teorema dell'asintoto)**.** *Sia $f \in C^0\big([a, +\infty)\big)$ tale che $\lim_{x\to+\infty} f(x) = l$, allora f è uniformemente continua.*

Osservazione 1.1. *Il viceversa non è vero, esistono funzioni uniformemente continue che non hanno asintoto orizzontale.*

Teorema 1.3 (Heine-Cantor)**.** *Se f è continua sull'intervallo $[a, b]$, allora f è uniformemente continua.*

ESERCIZIO 1:
Provare che se f è uniformemente continua in $(a, b]$ e in $[b, c)$, allora lo è anche in (a, c).

ESERCIZIO 2:
Stabilire se le seguenti funzioni sono uniformemente continue nei domini indicati:

$$
\begin{aligned}
(a) f(x) &= \sqrt{x} \text{ in } [0,+\infty) \\
(b) f(x) &= \frac{\sin(x^2)}{1+x^2} \text{ in } \mathbb{R} \\
(c) f(x) &= \arctan\frac{1}{x} \text{ in } (-1,0)\cup(0,1)\cup(1,+\infty) \\
(d) f(x) &= x^{\frac{1}{3}} \text{ in } \mathbb{R} \\
(e) f(x) &= (x^2)^{2x} \text{ in } (0,e)\cup(e,+\infty).
\end{aligned}
$$

ESERCIZIO 3:
Sia $f(x) = \sin(x^2)x$. Dimostrare che f soddisfa il teorema della farfalla, ma non è uniformemente continua.

ESERCIZIO 4:
Mostrare con dei controesempi che il teorema di Heine Cantor non è vero in un insieme:
(i) non chiuso
(ii) illimitato.

ESERCIZIO 5:
Provare che se f, g sono uniformemente continue, allora $\alpha f + \beta g$ e $(f \circ g)$ lo sono anche, mentre in generale non è così per il loro prodotto fg.

2 SOLUZIONI:

ESERCIZIO 1:
Applicando la definizione di uniforme continuità:
$\forall \epsilon > 0$, $\exists \delta_1$ tale che $\forall x, y \in (a, c]$, $|x - y| < \delta_1$,
$\Longrightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon$, e $\forall \epsilon > 0$, $\exists \delta_2$ tale che $\forall x, y \in [c, b)$, $|x - y| < \delta_2$,
$\Longrightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon$.
Posto $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, si dimostra facilmente che $\forall x, y \in (a, b)$ t.c. $|x-y| < \delta$, segue $|f(x) - f(y)| < 2\epsilon$.

ESERCIZIO 2:
(a) Si osserva che l'uniforme continuità di $\sqrt{x}$ in $[0, 1]$ è garantita dal teorema di Heine Cantor, mentre si dimostra che in $[1, +\infty)$ è lipschitziana, dunque si applica il risultato dimostrato nell'esercizio 1.
(b) Si applica il teorema dell'asintoto (per $x \to \pm\infty$).
(c) L'uniforme continuità di $\arctan(\frac{1x}{)}$ in $(-1, 0)$ si dimostra calcolando i limiti per $x \to -1^+$ e per $x \to 0^-$, (che esistono e sono finiti) e dunque applicando il teorema di Weierstrass e poi quello di Heine Cantor.
Analogamente per $x \in (0, 1)$.
In $(1, +\infty)$ si applica il teorema dell'asintoto.
(d)Scriviamo $\mathbb{R}$ come $(-\infty, -1] \cup [-1, 1] \cup [1, +\infty)$, allora $x^{\frac{1}{3}}$ è uniformemente continua nei due intervalli illimitati perché è lipschitziana, mentre in $[-1, 1]$ lo è per Heine Cantor.
(e) $f(x) = e^{4x \log x}$ è uniformemente continua in $(0, e)$ perché i limiti per $x \to 0^+$ e per $x \to e^-$ sono entrambi finiti, mentre NON è uniformemente continua in $[e, +\infty)$ perché non soddisfa il teorema della farfalla: dimostriamo infatti che

$$f(x) \geq x^2 \geq Ax + B \forall x \in [c, +\infty), \text{ con } c > \frac{A}{2} + \sqrt{\left(\frac{A}{2}\right)^2 + B}$$

.

ESERCIZIO 3:
Osserviamo che $\forall x \in [0, +\infty)$, vale:

$$|x \sin(x^2)| \leq x.$$

Siano $x_k^m = \sqrt{\frac{3}{2}\pi + 2k\pi}$ e $x_k^M = \sqrt{\frac{1}{2}\pi + 2k\pi}$, allora

$$\lim_{k \to +\infty} |x_k^M - x_k^m| = 0,$$

mentre

$$\lim_{k \to +\infty} |f(x_k^M) - f(x_k^m)| = \lim_{k \to +\infty} |x_k^m + x_k^M| = +\infty,$$

cioè f non è uniformemente continua.

ESERCIZIO 4:

(i) $f(x) = \frac{1}{x}$ in $(0, 1]$, scegliamo $y = \frac{x}{2}$, provando ad applicare la definizione di uniforme continuità, con $\delta = \frac{1}{2}$, otteniamo la disuguaglianza $\frac{1}{x} > \epsilon$, vera $\forall x < \frac{1}{\epsilon}$.
(ii) $f(x) = x^2$ in $[0, +\infty)$ non soddisfa il teorema della farfalla.

ESERCIZIO 5:
Si applica la definizione nei primi due casi, si usa un controesempio per il prodotto (ad esempio con $f = g = x$).