Am1c – Soluzioni Tutorato VI

Integrali I

Mercoledì 16 Aprile 2008

Filippo Cavallari, Marianna Coletta

Esercizio 1 Integrando per sostituzione si ottiene:

(1) $\int \frac{10x^4+12x^3-8}{2x^5+3x^4-8x}dx = \ln\left|2x^5+3x^4-8x\right|+k$

(2) $\int \frac{1}{x\ln x}dx = \ln\left|\ln x\right|+k$

(3) $\int \frac{1}{\tan x}dx = \ln\left|\sin x\right|+k$

(4) $\int \frac{1}{\cos x\sin x}dx = \ln\left|\tan x\right|+k$

(5) $\int \frac{\sin^8 x}{\tan x}dx = \frac{\sin^8 x}{8}+k$

(6) $\int \frac{1}{\arcsin x\sqrt{1-x^2}}dx = \ln\left|\arcsin x\right|+k$

(7) $\int \tan^2 x+\tan^4 x dx = \int \tan^2 x\left(1+\tan^2 x\right)dx = \frac{\tan^3 x}{3}+k$

(8) $\int \frac{\ln\left(\arctan x\right)}{\arctan x\left(1+x^2\right)}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2\ln\left(\arctan x\right)}{\arctan x\left(1+x^2\right)}dx = \frac{1}{2}\ln^2\left(\arctan x\right)+k$

(9) $\int \frac{\cos x}{1+\sin^2 x}dx = \arctan\left(\sin x\right)+k$

(10) $\int \frac{\ln\sqrt{x}}{x}dx = \frac{1}{4}\ln^2 x+k$

Esercizio 2 Ovviamente $\int dx = x+k$. Supponiamo ora che $\int x^n dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1}+k$ per un n fissato, e mostriamo che è valido per $n+1$. Integrando per parti si ha:

$$\int x^{n+1}dx = \int x^n x dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1}x - \frac{1}{n+1}\int x^{n+1}dx$$

Quindi:

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)\int x^{n+1}dx = \int x^n x dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1}x+k$$

Da cui, infine:

$$\int x^{n+1}dx = \frac{1}{n+2}x^{n+2}+k$$

Esercizio 3

(1) $\int \cos^2 xdx = \sin x\cos x + \int \sin^2 xdx = \sin x\cos x + \int 1-\cos^2 xdx = \sin x\cos x + x - \int \cos^2 xdx$

$\Rightarrow \int \cos^2 xdx = \dfrac{\sin x\cos x + x}{2}+k$

(2) $\int \sin^n xdx = \int \sin^{n-1} x\sin xdx = -\sin^{n-1} x\cos x + \int (n-1)\sin^{n-2} x\cos^2 xdx =$

$= -\sin^{n-1} x\cos x + (n-1)\int \sin^{n-2} x\left(1-\sin^2 x\right)dx = -\sin^{n-1} x\cos x + (n-1)\left(\int \sin^{n-2} xdx - \int \sin^n xdx\right)$

Quindi posto $C_n = \int \sin^n xdx$ si ottiene che:

$$C_n = \frac{-\sin^{n-1} x\cos x + (n-1)C_{n-2}}{n}$$

Ora poiché $C_0 = x+k \quad C_1 = -\cos x + k$, utilizzando la formula ricorsiva trovata, si ottiene per ogni *n* la primitiva che avrà come ultimo termine dell'iterazione C_0 se *n* è pari e C_1 se *n* è dispari.

(3) $\int x^3\sin xdx = -x^3\cos x + \int 3x^2\cos xdx = -x^3\cos x + 3x^2\sin x - \int 6x\sin xdx =$

$= -x^3\cos x + 3x^2\sin x + 6x\cos x - \int 6\cos xdx = -x^3\cos x + 3x^2\sin x + 6x\cos x - 6\sin x + k$

(4) $\int x^4e^xdx = x^4e^x - \int 4x^3e^xdx = x^4e^x - 4x^3e^x + \int 12x^2e^xdx = x^4e^x - 4x^3e^x + 12x^2e^x - \int 24xe^xdx =$

$= x^4e^x - 4x^3e^x + 12x^2e^x - 24xe^x + 24e^x + k$

(5) $\int x^2\ln xdx = \dfrac{x^3}{3}\ln x - \int \dfrac{x^2}{3}dx = \dfrac{x^3}{3}\ln x - \dfrac{x^3}{9}+k$

(6) $\int \arcsin xdx = x\arcsin x - \dfrac{1}{2}\int \dfrac{2x}{\sqrt{1-x^2}}dx = x\arcsin x + \dfrac{1}{2}\sqrt{1-x^2}+k$

(7) $\int \arctan xdx = x\arctan x - \dfrac{1}{2}\int \dfrac{2x}{}dx = x\arctan x - \dfrac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)+k$

(8) $\int \ln^2 xdx = x\ln^2 x - 2\int \ln xdx = x\ln^2 x - 2x(\ln x + 1) + k$

Esercizio 3 Con la sostituzione $x = a\sin t$ e quindi $dx = a\cos tdt$ si ottiene:

$$\int \sqrt{a^2-x^2}dx = a^2\int \cos^2 tdt = \frac{a^2}{2}(\sin t\cos t + t) + k = \frac{a^2}{2}\left(\frac{x}{a}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}} + \arcsin\left(\frac{x}{a}\right)\right)+k$$